МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ»

МАТЕМАТИКА

Реализация требований ФГОС основного общего образования

Методическое пособие для учителя

Москва
2022

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М34

Авторы:

Л. О. Рослова, кандидат педагогических наук,
Е. Е. Алексеева, кандидат педагогических наук, *Е. В. Буцко*

Под редакцией
Л. О. Рословой

Рецензенты:

Осмоловская И. М., доктор педагогических наук,
зав. лабораторией теоретической педагогики и философии образования
ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО»

Рыдзе О.А., кандидат педагогических наук,
старший научный сотрудник лаборатории начального общего образования
ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО»

М34 **Математика. Реализация требований ФГОС основного общего образования** : методическое пособие для учителя / Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко ; под ред. Л. О. Рословой. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2022. – 264 с.: ил.

ISBN 978-5-905736-84-1

В пособии отражены ключевые нововведения в части математического образования, связанные с принятием обновленных ФГОС. Методические материалы включают характеристику изменений, предложенных ФГОС ООО, и особенностей Примерной рабочей программы по математике. Основное содержание пособия составляют рекомендации по организации преподавания в 5-х классах ведущих тем и содержательных линий курса, отражающих данные нововведения. Предложен вариант контрольно-оценочных материалов, предназначенных для проведения внутришкольного мониторинга итоговых достижений учащихся, соответствующих планируемым результатам обучения, представленным в Примерной рабочей программе по математике.

Материалы представляют интерес для широкого круга специалистов в области математического образования: учителей, преподавателей педагогических вузов и колледжей, методистов системы повышения квалификации учителей, разработчиков материалов для оценки качества образования.

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания «Обновление содержания общего образования» по теме «Подготовка методических рекомендаций для учителей по реализации ФГОС начального общего и основного общего образования, в том числе внеурочной деятельности».

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-905736-84-1

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 5–6-Х КЛАССАХ

1.1. Ключевые изменения во ФГОС ООО и в Примерной основной образовательной программе в части обучения математике

В связи с принятием в мае 2021 года обновленных федеральных государственных образовательных стандартов основного общего образования (далее – ФГОС ООО) в содержании математического образования в 5–9-х классах произошли изменения, направленные на реализацию Концепции развития математического образования в Российской Федерации (утверждена в 2013 г.) и выполнение поручения Президента РФ «обеспечить совершенствование преподавания учебных предметов «математика» и «информатика» в общеобразовательных организациях, установив их приоритет в учебном плане и скорректировав содержание примерных основных образовательных программ общего образования» (декабрь 2020 г.).

Остановимся сначала на тех инновационных для математического образования изменениях, которые нашли отражение в федеральном стандарте. Прежде всего отметим, что в новой редакции стандарта были конкретизированы и структурированы личностные, метапредметные и предметные результаты обучения. Это общее изменение, касающееся всех учебных предметов, в том числе и математики. Важно, что стандарты не сменили своих концептуальных оснований, а продолжают развитие в той же парадигме, учитывая при этом изменения, происходящие в науке, обществе и государстве.

Впервые во ФГОС основного общего образования зафиксированы требования не только на базовом, но и на углубленном уровне, причем математика здесь оказалась не единственным предметом, такой прецедент уже имел место, углубленный уровень освоения предмета предусмотрен обновленным стандартом также и для предметов математического и естественно-научного направлений: информатики, физики, химии, биологии. Это нововведение подхватывает и развивает традиции российского математического образования, позволяет углубленному курсу обучения существовать в том же правовом поле, формироваться в той же логике и структуре, что и базовый курс, а также поддерживаться другими предметами. В этом направлении появилась перспектива взаимодействия и интеграции как в рамках предметной области «Математика и информатика», так и области «Естественно-научные предметы».

При этом важно, что в обновленном ФГОС ООО было реализовано новое понимание базового и углубленного уровней изучения математики, дано соответствующее этому иное распределение между ними требований к математической подготовке выпускника основной школы. Прежде всего, определяется ориентация базового курса на интересы и потребности тех учащихся, кому математика будет нужна только «для жизни», но не в профессии, а углубленного курса – на потребности и возможности всех тех учащихся, кто будет математиком или будет использовать математику в профессии (инженеры, программисты, технологи и пр.). До этого традиционная программа углубленного изучения математики была ориентирована на тех, кто планирует связать свою профессиональную деятельность с математикой.

Еще одним важным моментом является более четкое представление структуры учебного предмета «Математика», которую образовали 4 учебных курса: «Математика» для учащихся 5–6-х классов, «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика» для учащихся 7–9-х классов.

Отдельно отметим появление в структуре предмета нового курса – «Вероятность и статистика», основное содержание которого ранее было представлено в курсе алгебры. Основными линиями содержания этого курса стали: вероятность, статистика, комбинаторика, графы, логика, множества.

Данный курс сразу получил прикладной характер, включающий практические работы и эксперименты.

Следующим шагом нормативно-методического обеспечения образовательного процесса стала разработка и принятие еще двух документов: Примерной основной образовательной программы основного общего образования (далее – ПООП) и Примерной рабочей программы по математике (далее – ПРП).

Таким образом, в настоящее время складывается триада: ФГОС, ПООП, ПРП. Кратко дадим их основные характеристики:

ФГОС – нормативный документ, утвержден приказом Минпросвещения России от 31.05.2021 N 287:

– содержит требования к результатам обучения на конец обучения в основной школе;

– предметные результаты описаны с использованием терминологии «оперировать понятием/свободно оперировать понятием».

ПООП – методический документ, одобрен ФУМО по общему образованию 18.03.2022 протокол № 1/22:

– содержит результаты обучения + содержание обучения;

– включает конкретизированные применительно к обучению математике личностные и метапредметные результаты обучения;

– предметные результаты и содержание обучения представлены по годам обучения – с 5-го по 9-й класс;

– учебным планом для изучения математики в 5–6-х классах предусмотрено не менее 5 учебных часов в неделю в течение каждого года обучения; курсы, изучаемые в 7–9-х классах на базовом уровне, реализуются параллельно в объеме соответственно 3, 2 и 1 учебный час в неделю в течение каждого года обучения, всего 6 учебных часов.

ПРП – методический документ, одобрен ФУМО по общему образованию 27.09.2021 протокол № 3/21:

– содержит результаты обучения + содержание обучения + тематическое планирование;

– в тематическом планировании дано примерное распределение учебного времени и описаны основные виды деятельности обучающихся, обеспечивающие достижение планируемых результатов обучения.

1.2. Особенности новой Примерной рабочей программы по учебному предмету «Математика» в основной школе

Приведем структуру Примерной рабочей программы учебного предмета «Математика».

Пояснительная записка, включающая:

- общую характеристику учебного предмета «Математика»;
- цели и особенности изучения учебного предмета «Математика»;
- место учебного предмета «Математика» в учебном плане.

Планируемые результаты освоения учебного предмета «Математика» на уровне основного общего образования:

- личностные результаты;
- метапредметные результаты.

Программы курсов (4 программы), представленные в единой структуре с другими учебными предметами и включающие:

- цели изучения учебного курса;
- место учебного курса в учебном плане;
- предметные результаты освоения Примерной рабочей программы (по годам обучения);
- содержание учебного курса (по годам обучения);
- тематическое планирование учебного курса (по годам обучения).

Как было отмечено выше, личностные и метапредметные результаты освоения учебного предмета «Математика» представлены в ПРП не по отдельным курсам, а по предмету в целом, при этом даны они в соответствии с единой принятой структурой, но конкретизированы именно с учетом специфики обучения математике.

Например, записано, что личностные результаты освоения программы по математике в части эстетического воспитания должны отражать «способность к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений; умение видеть математические закономерности в искусстве». А метапредметные результаты освоения программы регулятивного характера в части самоорганизации должны обеспечивать формирование следующих умений: «самостоятельно составлять план, алгоритм решения задачи (или его часть), выбирать способ решения с учетом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учетом новой информации».

Отметим изменения в обучении математике в 5–9-х классах, связанные с содержанием и планируемыми результатами обучения, которые были реализованы в Примерной рабочей программе.

1) Выполнена определенная разгрузка объема изучаемого материала за счет отказа от некоторых элементов содержания, снижения требований к освоению формальных элементов содержания программы и сложных понятий. Прежде всего это связано с новым вектором в распределении акцентов между базовым и углубленным уровнями.

2) Осуществлен отход от линейного принципа построения курса, что ярче всего выразилось, например, в пролонгировании изучения числовой линии в курсе алгебры в 7-м классе. Более распределенное во времени и по классам изучение фундаментальных и сложных понятий курса, важных практико-ориентированных тем позволит ученику неоднократно возвращаться к ключевым понятиям и элементам содержания, но не в качестве простого повторения изученного, «топтания на одном месте», а на более

высоком уровне развития его математических знаний, с новыми связями между понятиями, способами действий, с учетом его взросления.

3) Обеспечен временной зазор – «ножницы» – между распределенными по годам обучения содержанием и требованиями к овладению этим содержанием.

Проиллюстрируем данные тезисы на примере темы «Делимость».

Начало изучение темы отнесено к 5-му классу, где в содержании зафиксированы следующие дидактические единицы: «Делители и кратные числа, разложение на множители. Простые и составные числа. Признаки делимости на 2, 5, 10, 3, 9. Деление с остатком». Это именно то содержание, которое необходимо, в частности, для освоения действий с обыкновенными дробями.

В 6-м классе в рамках этой темы осваивается следующее содержание: «Делители и кратные числа; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Делимость суммы и произведения. Деление с остатком».

При этом ни в 5-м классе, ни в 6-м классе в требованиях к результатам обучения нет позиций, связанных с данной темой, изучение темы носит пока чисто прикладной характер: в это время учащиеся накапливают знания и представления о свойствах чисел, связанные с делимостью. Требование «применять признаки делимости, разложение на множители натуральных чисел» относится к 7-му классу (отнесено к курсу алгебры), где соответствующие элементы включены также и в содержание. Именно в конце 7-го класса учащиеся могут проявить умения, которыми они овладевали в течение трех лет обучения. За счет постепенного раскрытия, наращивания и усложнения содержания, а также включения его в другие темы создаются комфортные для обучающихся условия для овладения математикой, обеспечивается необходимая для этого мотивация.

Есть ли изменения в тематическом планировании? В тематическом планировании, как и принято, дается распределение содержания по темам с указанием рекомендуемых часов на их изучение. Содержание представлено крупными тематическими блоками, чтобы авторы программ и учебников, учителя, составляющие свои авторские программы, могли вписаться в эти рамки и найти структурирование, адекватное отработанным и зарекомендовавшим себя в практике обучения методическим подходам и принципам. В программе отмечено: «Автор рабочей программы вправе увеличить или уменьшить предложенное число учебных часов на тему, чтобы углубиться в тематику, более заинтересовавшую учеников, или направить усилия на преодоление затруднений. Допустимо также локальное перераспределение и перестановка элементов содержания внутри данного класса».

Принципиальная позиция разработчиков программы заключается в том, что контроль не фиксируется в программе, количество проверочных работ (тематический и итоговый контроль качества усвоения учебного материала) и их тип (самостоятельные и контрольные работы, тесты) остаются на усмотрении учителя.

В настоящем тематическом планировании зафиксировано отдельными позициями итоговое обобщение, повторение, систематизация знаний в конце каждого года обучения, большой блок выделен для этого в 9-м классе для подготовки к ГИА. Также учитель вправе увеличить или уменьшить число учебных часов, отведенных на обобщение, повторение, систематизацию знаний обучающихся.

Единственной целью и критерием является достижение планируемых результатов обучения, указанных в программе.

Для обеспечения процесса формирования предметных и метапредметных результатов обучения в тематическом планировании представлены соответствующие виды деятельности, направленные на формирование прочных предметных навыков и развитие логического мышления, умения рассуждать, работать с информацией, проводить математические эксперименты, практические работы и исследования, в том числе с использованием цифровых ресурсов.

Предметные виды деятельности представлены такими действиями, как: вычислять, строить, изображать, измерять, записывать формулу, выражение, формулировать и применять правило, алгоритм, сравнивать и упорядочивать, осваивать понятия и способы, изучать свойства, решать задачи и др. К метапредметным видам деятельности относятся следующие: решать задачи разными способами; сравнивать, выбирать, предлагать и обсуждать алгоритмы, способы решения задачи; осуществлять самоконтроль и самопроверку; находить экспериментальным путем, моделировать, конструировать; наблюдать и анализировать, выявлять сходства и различия; иллюстрировать, приводить примеры, контрпримеры; исследовать, выдвигать гипотезы, обосновывать, опровергать.

В целях усиления практико-ориентированной направленности обучения практические работы вставлены в планирование и как элемент содержания.

Необходимость использования цифровых ресурсов также отражена в видах деятельности в тех темах, где это целесообразно, подчеркивается потенциал цифровых ресурсов прежде всего для развития исследовательских умений.

В видах деятельности уделено внимание формированию функциональной математической грамотности, во многих темах всех курсов предлагается «решать задачи из реальной жизни», «применять математические знания для решения задач из других предметов». Акцентированное формирование функциональной математической грамотности, феномен которой изучается как в ходе международных, так и российских исследований, поможет учителю сделать изучение математики на базовом уровне более мотивационно оправданным.

В заключение отметим, что реализация в образовательной практике обновленного нормативно-методического программного комплекса, который, с одной стороны, базируется на традициях и достижениях математического образования, а с другой стороны, открывает новые возможности и ресурсы, позволит сделать обучение математике более результативным, а процесс овладения математическими знаниями более развивающим.

1.3. Содержание и планируемые результаты обучения в рамках учебного предмета «Математика» для учащихся 5–6-х классов

В таблице 1 представлены содержание обучения в курсах математики 5-го и 6-го классов и требования к результатам их освоения на конец года. Данное представление удобно учителю для сопоставления новой программы с традиционной программой, по которой он работает, а также для выявления итоговых результатов обучения, которые необходимо достичь в текущем учебном году, и результатов, достижение которых отнесено к последующим годам обучения. Это поможет педагогу правильно расставить акценты при организации обучения и контроля учебных достижений: промежуточных, тематических и итоговых.

Таблица 1

Содержание обучения в курсах математики 5-го и 6-го классов и требования к результатам их освоения

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
5-Й КЛАСС	
Числа и вычисления	
Натуральные числа и нуль	
Натуральное число. Ряд натуральных чисел. Число 0. Изображение натуральных чисел точками на координатном луче. Позиционная система счисления. Римская нумерация как пример непозиционной системы счисления. Десятичная система счисления. Сравнение натуральных чисел, сравнение натуральных чисел с нулем. Способы сравнения. Округление натуральных чисел. Сложение натуральных чисел; свойство нуля при сложении. Вычитание как действие, обратное	• Понимать и правильно употреблять термины, связанные с натуральными числами. • Сравнивать и упорядочивать натуральные числа. • Соотносить точку на координатном луче с соответствующим ей числом и изображать натуральные числа точками на координатном луче. • Выполнять арифметические действия с натуральными числами. • Выполнять проверку, прикидку результата вычислений. • Округлять натуральные числа

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
сложению. Умножение натуральных чисел; свойства нуля и единицы при умножении. Деление как действие, обратное умножению. Компоненты действий, связь между ними. Проверка результата арифметического действия. Переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения относительно сложения. Использование букв для обозначения неизвестных компонент и записи свойств арифметических действий. Делители и кратные числа, разложение на множители. Деление с остатком. Степень с натуральным показателем. Запись числа в виде суммы разрядных слагаемых. Числовое выражение. Вычисление значений числовых выражений; порядок выполнения действий. Использование при вычислениях переместительного и	

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
сочетательного свойств сложения и умножения, распределительного свойства умножения относительно сложения	
Дроби	
Представление о дроби как способе записи части величины. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанная дробь; представление смешанной дроби в виде неправильной дроби и выделение целой части числа из неправильной дроби. Изображение дробей точками на координатном луче. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Приведение дроби к новому знаменателю. Сравнение дробей. Сложение и вычитание дробей. Умножение и деление дробей; взаимно-обратные дроби. Нахождение части целого и целого по его части.	• Понимать и правильно употреблять термины, связанные с обыкновенными и десятичными дробями. • Сравнивать в простейших случаях обыкновенные дроби, десятичные дроби. • Соотносить точку на координатном луче с соответствующим ей числом. • Выполнять арифметические действия с обыкновенными дробями в простейших случаях. • Выполнять проверку, прикидку результата вычислений

Содержание обучения		*Требования к результатам обучения*
Десятичная запись дробей. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной. Изображение десятичных дробей точками на координатной прямой. Сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Округление десятичных дробей		
Решение текстовых задач		
Решение текстовых задач арифметическим способом. Решение логических задач. Решение задач перебором всех возможных вариантов. Использование при решении задач таблиц и схем. Решение задач, содержащих зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость. Единицы измерения: массы, вместимости, цены; расстояния, времени,		• Решать текстовые задачи арифметическим способом и с помощью организованного конечного перебора всех возможных вариантов. • Решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость. • Использовать краткие записи, схемы, таблицы, обозначения при решении задач.

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
скорости. Связь между единицами измерения каждой величины. Решение основных задач на дроби. Представление данных в виде таблиц, столбчатых диаграмм	• Пользоваться основными единицами измерения: цены, массы; расстояния, времени, скорости; выражать одни единицы величины через другие. • Извлекать, анализировать, оценивать информацию, представленную в таблице, на столбчатой диаграмме, интерпретировать представленные данные, использовать данные при решении задач
Наглядная геометрия	
Наглядные представления о фигурах на плоскости: точка, прямая, отрезок, луч, угол, ломаная, многоугольник, окружность, круг. Угол. Прямой, острый, тупой и развернутый углы. Длина отрезка, метрические единицы длины. Длина ломаной, периметр многоугольника. Измерение и построение углов с помощью транспортира. Наглядные представления о фигурах на плоскости: многоугольник; прямоугольник, квадрат; треугольник;	• Пользоваться геометрическими понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, угол, многоугольник, окружность, круг. • Приводить примеры объектов окружающего мира, имеющих форму изученных геометрических фигур. • Использовать терминологию, связанную с углами: вершина сторона; с многоугольниками: угол, вершина, сторона, диагональ; с окружностью: радиус, диаметр, центр.

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
о равенстве фигур. Изображение фигур, в том числе на клетчатой бумаге. Построение конфигураций из частей прямой, окружности на нелинованной и клетчатой бумаге. Использование свойств сторон и углов прямоугольника, квадрата. Площадь прямоугольника и многоугольников, составленных из прямоугольников, в том числе фигур, изображенных на клетчатой бумаге. Единицы площади. Наглядные представления о пространственных фигурах: прямоугольный параллелепипед, куб, многогранники. Изображение простейших многогранников. Развертки куба и параллелепипеда. Создание моделей многогранников (из бумаги, проволоки, пластилина и др.). Объем прямоугольного параллелепипеда, куба. Единицы измерения объема	• Изображать изученные геометрические фигуры на нелинованной и клетчатой бумаге с помощью циркуля и линейки; строить окружность заданного радиуса. • Находить длины отрезков непосредственным измерением с помощью линейки, строить отрезки заданной длины; строить окружность заданного радиуса. • Использовать свойства сторон и углов прямоугольника, квадрата для их построения, вычисления площади и периметра. • Вычислять периметр и площадь квадрата, прямоугольника, фигур, составленных из прямоугольников, в том числе фигур, изображенных на клетчатой бумаге. • Пользоваться основными метрическими единицами измерения длины, площади; выражать одни единицы величины через другие

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
6-Й КЛАСС	
Числа и вычисления	
Натуральные числа Арифметические действия с многозначными натуральными числами. Числовые выражения, порядок действий, использование скобок. Использование при вычислениях переместительного и сочетательного свойств сложения и умножения, распределительного свойства умножения относительно сложения. Округление натуральных чисел. Делители и кратные числа; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Делимость суммы и произведения. Признаки делимости на 2, 5, 10, 3, 9. Деление с остатком	• Знать и понимать термины, связанные с различными видами чисел и способами их записи, переходить (если это возможно) от одной формы записи числа к другой. • Сравнивать и упорядочивать целые числа, обыкновенные и десятичные дроби, сравнивать числа одного и разных знаков. • Выполнять, сочетая устные и письменные приемы, арифметические действия с натуральными и целыми числами, обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами. • Вычислять значения числовых выражений, выполнять прикидку и оценку результата

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
Дроби Обыкновенная дробь, основное свойство дроби, сокращение дробей. Сравнение и упорядочивание дробей. Решение задач на нахождение части от целого и целого по его части. Дробное число как результат деления. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и возможность представления обыкновенной дроби в виде десятичной. Десятичные дроби и метрическая система мер. Арифметические действия и числовые выражения с обыкновенными и десятичными дробями. Отношение. Деление в данном отношении. Масштаб, пропорция. Применение пропорций при решении задач. Понятие процента. Вычисление процента от величины и величины по ее проценту. Выражение процентов	вычислений; выполнять преобразования числовых выражений на основе свойств арифметических действий. • Пользоваться признаками делимости, раскладывать натуральные числа на простые множители. • Соотносить точку на координатной прямой с соответствующим ей числом и изображать числа точками на координатной прямой, находить модуль числа. • Соотносить точки в прямоугольной системе координат с координатами этой точки. • Округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
десятичными дробями. Решение задач на проценты. Выражение отношения величин в процентах	
Положительные и отрицательные числа Положительные и отрицательные числа. Целые числа. Модуль числа, геометрическая интерпретация модуля числа. Изображение чисел на координатной прямой. Числовые промежутки. Сравнение чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами. Прямоугольная система координат на плоскости. Координаты точки на плоскости, абсцисса и ордината. Построение точек и фигур на координатной плоскости	
Числовые и буквенные выражения	
Применение букв для записи математических выражений и предложений. Свойства арифметических	• Понимать и употреблять термины, связанные с записью степени числа, находить квадрат и куб

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
действий. Буквенные выражения и числовые подстановки. Буквенные равенства, нахождение неизвестного компонента. Формулы; формулы периметра и площади прямоугольника, квадрата, объема параллелепипеда и куба	числа, вычислять значения числовых выражений, содержащих степени. • Пользоваться масштабом, составлять пропорции и отношения. • Использовать буквы для обозначения чисел при записи математических выражений, составлять буквенные выражения и формулы, находить значения буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования. • Находить неизвестный компонент равенства
Решение текстовых задач	
Решение текстовых задач арифметическим способом. Решение логических задач. Решение задач перебором всех возможных вариантов. Решение задач, содержащих зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость;	• Решать многошаговые текстовые задачи арифметическим способом. • Решать задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, процентами; решать три основные задачи на дроби и проценты. • Решать задачи, содержащие зависимости,

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
производительность, время, объем работы. Единицы измерения: массы, стоимости; расстояния, времени, скорости. Связь между единицами измерения каждой величины. Решение задач, связанных с отношением, пропорциональностью величин, процентами; решение основных задач на дроби и проценты. Оценка и прикидка, округление результата. Составление буквенных выражений по условию задачи. Представление данных с помощью таблиц и диаграмм. Столбчатые диаграммы: чтение и построение. Чтение круговых диаграмм	связывающие величины: скорость, время, расстояние, цена, количество, стоимость; производительность, время, объем работы, используя арифметические действия, оценку, прикидку; пользоваться единицами измерения соответствующих величин. • Составлять буквенные выражения по условию задачи. • Извлекать информацию, представленную в таблицах, на линейной, столбчатой, круговой диаграммах, интерпретировать представленные данные; использовать данные при решении задач. • Представлять информацию с помощью таблиц, линейной и столбчатой диаграмм
Наглядная геометрия	
Наглядные представления о фигурах на плоскости: точка, прямая, отрезок, луч, угол, ломаная,	• Приводить примеры объектов окружающего мира, имеющих форму изученных геометрических плоских

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
многоугольник, четырехугольник, треугольник, окружность, круг. Взаимное расположение двух прямых на плоскости, параллельные прямые, перпендикулярные прямые. Измерение расстояний: между двумя точками, от точки до прямой; длина маршрута на квадратной сетке. Измерение и построение углов с помощью транспортира. Виды треугольников: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный; равнобедренный, равносторонний. Четырехугольник, примеры четырехугольников. Прямоугольник, квадрат: использование свойств сторон, углов, диагоналей. Изображение геометрических фигур на нелинованной бумаге с использованием циркуля, линейки, угольника, транспортира. Построения на клетчатой бумаге. Периметр многоугольника. Понятие площади фигуры; единицы измерения площади. Приближенное	и пространственных фигур, примеры равных и симметричных фигур. • Изображать с помощью циркуля, линейки, транспортира на нелинованной и клетчатой бумаге изученные плоские геометрические фигуры и конфигурации, симметричные фигуры. • Пользоваться геометрическими понятиями: равенство фигур, симметрия; использовать терминологию, связанную с симметрией: ось симметрии, центр симметрии. • Находить величины углов измерением с помощью транспортира, строить углы заданной величины, пользоваться при решении задач градусной мерой углов; распознавать на чертежах острый, прямой, развернутый и тупой углы.

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
измерение площади фигур, в том числе на квадратной сетке. Приближенное измерение длины окружности, площади круга. Симметрия: центральная, осевая и зеркальная симметрии. Построение симметричных фигур. Наглядные представления о пространственных фигурах: параллелепипед, куб, призма, пирамида, конус, цилиндр, шар и сфера. Изображение пространственных фигур. Примеры разверток многогранников, цилиндра и конуса. Создание моделей пространственных фигур (из бумаги, проволоки, пластилина и др.). Понятие объема; единицы объема. Объем прямоугольного параллелепипеда, куба	• Вычислять длину ломаной, периметр многоугольника, пользоваться единицами длины, выражать одни единицы через другие. • Находить, используя чертежные инструменты, расстояния: между двумя точками, от точки до прямой, длину пути на квадратной сетке. • Вычислять площадь фигур, составленных из прямоугольников, использовать разбиение на прямоугольники, на равные фигуры, достраивание до прямоугольника; пользоваться основными единицами измерения площади; выражать одни единицы через другие. • Распознавать на моделях и изображениях пирамиду, конус, цилиндр, использовать терминологию: вершина, ребро, грань, основание, развертка.

Содержание обучения	*Требования к результатам обучения*
	• Моделировать изученные пространственные фигуры (из бумаги, проволоки, пластилина и др.); изображать на клетчатой бумаге. • Вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба, пользоваться основными единицами измерения; выражать одни единицы через другие. • Решать несложные задачи на нахождение геометрических величин в практических ситуациях

1.4. Примеры заданий, конкретизирующих планируемые результаты обучения и итоговой контрольной работы за курс 5-го класса

1.4.1. Предметные результаты освоения Примерной рабочей программы курса «Математика» (по годам обучения)

Освоение учебного курса «Математика» в 5–6-х классах основной школы должно обеспечивать достижение следующих предметных образовательных результатов, представленных в таблице 2 по классам. Табличная форма представления позволяет сравнить планируемые результаты и оценить продвижение учащихся в их освоении от класса к классу.

Таблица 2

Планируемые результаты обучения математике в 5-м и 6-м классах

5-й класс	6-й класс
Числа и вычисления	
• Понимать и правильно употреблять термины, связанные с натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями. • Сравнивать и упорядочивать натуральные числа, сравнивать в простейших случаях обыкновенные дроби, десятичные дроби.	• Знать и понимать термины, связанные с различными видами чисел и способами их записи, переходить (если это возможно) от одной формы записи числа к другой. • Сравнивать и упорядочивать целые числа, обыкновенные и десятичные дроби, сравнивать числа одного и разных знаков.

5-й класс	6-й класс
• Выполнять арифметические действия с натуральными числами, с обыкновенными дробями в простейших случаях. • Выполнять проверку, прикидку результата вычислений. • Округлять натуральные числа. • Соотносить точку на координатном луче с соответствующим ей числом и изображать натуральные числа точками на координатном луче	• Выполнять, сочетая устные и письменные приемы, арифметические действия с натуральными и целыми числами, обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами. • Вычислять значения числовых выражений, выполнять прикидку и оценку результата вычислений; выполнять преобразования числовых выражений на основе свойств арифметических действий. • Округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел. • Соотносить точку на координатной прямой с соответствующим ей числом и изображать числа точками на координатной прямой, находить модуль числа. • Соотносить точки в прямоугольной системе координат с координатами этой точки

5-й класс	6-й класс
Числовые и буквенные выражения	
	• Понимать и употреблять термины, связанные с записью степени числа, находить квадрат и куб числа, вычислять значения числовых выражений, содержащих степени. • Пользоваться признаками делимости, раскладывать натуральные числа на простые множители. • Пользоваться масштабом, составлять пропорции и отношения. • Использовать буквы для обозначения чисел при записи математических выражений, составлять буквенные выражения и формулы, находить значения буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования. • Находить неизвестный компонент равенства

<table>
<tr><th>5-й класс</th><th>6-й класс</th></tr>
<tr><td colspan="2">Решение текстовых задач</td></tr>
<tr><td>Решать текстовые задачи арифметическим способом и с помощью организованного конечного перебора всех возможных вариантов.
Решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние, цена, количество, стоимость.
Использовать краткие записи, схемы, таблицы, обозначения при решении задач.
Пользоваться основными единицами измерения: цены, массы; расстояния, времени, скорости; выражать одни единицы величины через другие.
Извлекать, анализировать, оценивать информацию, представленную в таблице, на столбчатой диаграмме, интерпретировать представленные данные, использовать данные при решении задач</td><td>Решать многошаговые текстовые задачи арифметическим способом.
Решать задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, процентами; решать три основные задачи на дроби и проценты.
Решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние, цена, количество, стоимость; производительность, время, объем работы, используя арифметические действия, оценку, прикидку; пользоваться единицами измерения соответствующих величин.
Составлять буквенные выражения по условию задачи.</td></tr>
</table>

5-й класс	6-й класс
	• Извлекать информацию, представленную в таблицах, на линейной, столбчатой, круговой диаграммах, интерпретировать представленные данные; использовать данные при решении задач. • Представлять информацию с помощью таблиц, линейной и столбчатой диаграмм
Наглядная геометрия	
• Пользоваться геометрическими понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, угол, многоугольник, окружность, круг. • Приводить примеры объектов окружающего мира, имеющих форму изученных геометрических фигур. • Использовать терминологию, связанную с углами: вершина, сторона; с многоугольниками: угол,	• Приводить примеры объектов окружающего мира, имеющих форму изученных геометрических плоских и пространственных фигур, примеры равных и симметричных фигур. • Изображать с помощью циркуля, линейки, транспортира на нелинованной и клетчатой бумаге изученные плоские геометрические фигуры и конфигурации, симметричные фигуры.

5-й класс	6-й класс
вершина, сторона, диагональ; с окружностью: радиус, диаметр, центр. • Изображать изученные геометрические фигуры на нелинованной и клетчатой бумаге с помощью циркуля и линейки; строить окружность заданного радиуса. • Находить длины отрезков непосредственным измерением с помощью линейки, строить отрезки заданной длины. • Использовать свойства сторон и углов прямоугольника, квадрата для их построения, вычисления площади и периметра. • Вычислять периметр и площадь квадрата, прямоугольника, фигур, составленных из прямоугольников, в том числе фигур, изображенных на клетчатой бумаге.	• Пользоваться геометрическими понятиями: равенство фигур, симметрия; использовать терминологию, связанную с симметрией: ось симметрии, центр симметрии. • Находить величины углов измерением с помощью транспортира, строить углы заданной величины, пользоваться при решении задач градусной мерой углов; распознавать на чертежах острый, прямой, развернутый и тупой углы. • Вычислять длину ломаной, периметр многоугольника, пользоваться единицами длины, выражать одни единицы через другие. • Находить, используя чертежные инструменты, расстояния: между двумя точками, от точки до прямой, длину пути на квадратной сетке. • Вычислять площадь фигур, составленных из прямоугольников, использовать разбиение

5-Й КЛАСС	**6-Й КЛАСС**
• Пользоваться основными метрическими единицами измерения длины, площади; выражать одни единицы величины через другие. • Распознавать параллелепипед, куб, использовать терминологию: вершина, ребро грань, измерения; находить измерения параллелепипеда, куба. • Вычислять объем куба, параллелепипеда по заданным измерениям, пользоваться единицами объема. • Решать несложные задачи на измерение геометрических величин в практических ситуациях	на прямоугольники, на равные фигуры, достраивание до прямоугольника; пользоваться основными единицами измерения площади; выражать одни единицы через другие. • Распознавать на моделях и изображениях пирамиду, конус, цилиндр, использовать терминологию: вершина, ребро, грань, основание, развертка. • Моделировать изученные пространственные фигуры (из бумаги, проволоки, пластилина и др.); изображать на клетчатой бумаге. • Вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба, пользоваться основными единицами измерения; выражать одни единицы через другие. • Решать несложные задачи на нахождение геометрических величин в практических ситуациях

1.4.2. Примеры заданий, конкретизирующих планируемые результаты обучения за курс 5-го класса

Числа и вычисления

- Сравнивать и упорядочивать натуральные числа, сравнивать в простейших случаях обыкновенные дроби, десятичные дроби.

Задание 1 (базовый уровень).

Сравните числа: а) 42 982 и 42 592; б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{9}$; в) 6,25 и 6,52.

Задание 2 (повышенный уровень).

В таблице приведены результаты финального забега на 60 м четырёх участников школьных соревнований:

Номер дорожки	I	II	III	IV
Результат, *с*	10,40	12,09	11,10	10,04

Запишите номер дорожки, по которой бежал победитель школьных соревнований.

- Понимать и правильно употреблять термины, связанные с натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями.

Задание 3 (повышенный уровень).

Запишите наименьшее и наибольшее пятизначные числа, которые можно составить, используя два раза цифру 4 и три раза цифру 0.

- Выполнять арифметические действия с натуральными числами, с обыкновенными дробями в простейших случаях.

Задание 4 (базовый уровень).

Найдите значение выражения: (2560 – 1405) : 231.

Задание 5 (базовый уровень).

Сначала Саша выучил $\frac{3}{10}$ стихотворения, затем ещё $\frac{2}{5}$ этого стихотворения. Какую часть стихотворения ему осталось выучить?

Задание 6 (повышенный уровень).

Найдите значение выражения: $2\frac{11}{18}-\frac{7}{8}:2\frac{1}{4}$.

- Округлять натуральные числа.

Задание 7 (базовый уровень).

Высота горы равна 5189 м. Сколько это примерно километров?

Решение текстовых задач

- Решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость.

Задание 8 (базовый уровень).

Велотурист выбрал маршрут длиной 45 км. Он проехал по маршруту 2 ч со скоростью 14 км/ч. Сколько километров ему осталось проехать по маршруту?

- Извлекать, анализировать, оценивать информацию, представленную в таблице, на столбчатой диаграмме, интерпретировать представленные данные, использовать данные при решении задач.

См. *задание 2*.

Наглядная геометрия

- Использовать терминологию, связанную с окружностью: радиус, диаметр, центр.

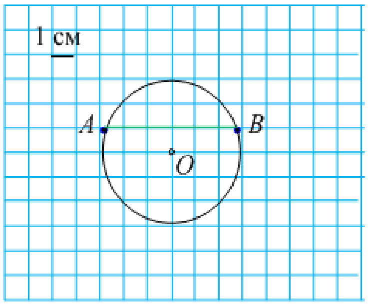
Задание 9 (базовый уровень).

Запишите номер рисунка, на котором верно выполнены построения:

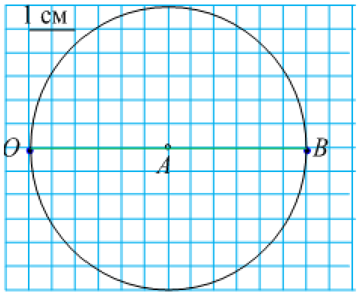
1) отметили точку O – центр окружности;

2) провели окружность радиусом 3 см с центром в точке O;

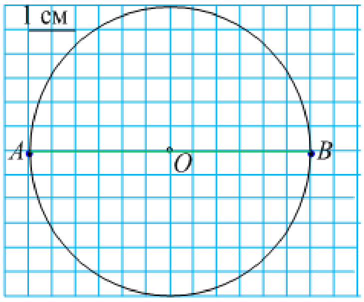
3) провели диаметр окружности и обозначили его AB.



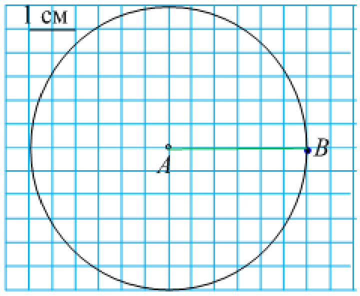
1)



3)



2)

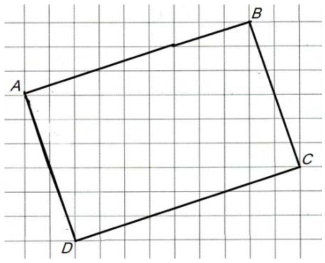


4)

- Изображать изученные геометрические фигуры на нелинованной и клетчатой бумаге с помощью циркуля и линейки; строить окружность заданного радиуса.

Задание 10 (базовый уровень).

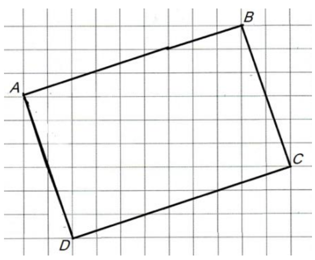
Скопируйте прямоугольник *ABCD* в тетрадь.



- Находить длины отрезков непосредственным измерением с помощью линейки, строить отрезки заданной длины.

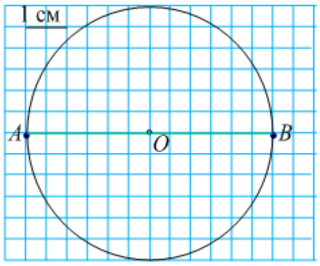
Задание 11 (базовый уровень).

Измерьте и запишите длины сторон прямоугольника *ABCD*.



Задание 12 (базовый уровень).

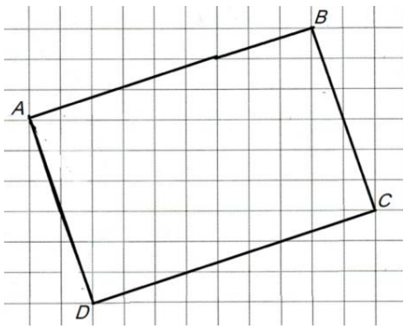
Запишите длину диаметра построенной окружности.



- Вычислять периметр и площадь квадрата, прямоугольника, фигур, составленных из прямоугольников, в том числе фигур, изображенных на клетчатой бумаге.

Задание 13 (повышенный уровень).

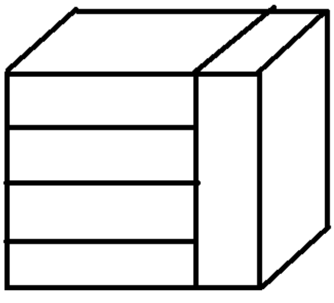
Используя результаты измерений, вычислите площадь прямоугольника *ABCD*.



- Распознавать параллелепипед, куб, использовать терминологию: вершина, ребро грань, измерения; находить измерения параллелепипеда, куба.

Задание 14 (повышенный уровень).

Параллелепипед, изображённый на рисунке, сложен из пяти одинаковых брусков с измерениями 1 см, 4 см и 7 см. Определите измерения полученного параллелепипеда.



1.4.3. Пример итоговой контрольной работы за курс 5-го класса

СПЕЦИФИКАЦИЯ

контрольной работы для оценки достижения планируемых результатов обучения по МАТЕМАТИКЕ за курс 5-го класса

Назначение работы: Определение соответствия образовательных результатов освоения учебного курса «Математика» учащимися 5-го класса.

Структура работы: Всего в работе 16 заданий, среди них 11 заданий базового уровня и 5 задания повышенного уровня.

Задания разного уровня обозначены в работе специальными значками:

○ – задание базового уровня (основная часть);

● – задание повышенного уровня (дополнительная часть).

Контрольная работа приводится в двух вариантах.

Время выполнения работы: На выполнение работы отводится 80 минут. Работа выполняется на клетчатой бумаге.

План варианта работы представлен в таблице 3.

Таблица 3

План варианта контрольной работы

Номер задания в работе	*Проверяемые умения*	*Уровень сложности задания*	*Примерное время выполнения, мин*
1	Сравнивать натуральные числа, сравнивать в простейших случаях обыкновенные дроби, десятичные дроби	Базовый	3
2	Округлять натуральные числа	Базовый	2

Номер задания в работе	*Проверяемые умения*	*Уровень сложности задания*	*Примерное время выполнения, мин*
3	Выполнять арифметические действия с натуральными числами	Базовый	4
4	Решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние	Базовый	3
5	Решать текстовые задачи арифметическим способом	Базовый	4
6	Использовать терминологию, связанную с окружностью: радиус, диаметр, центр, строить окружность заданного радиуса	Базовый	4
7*а*, *б*	Изображать геометрические фигуры на нелинованной и клетчатой бумаге с помощью циркуля и линейки; находить длины отрезков непосредственным измерением с помощью линейки, строить отрезки заданной длины	Базовый	4
7*в*	Вычислять периметр и площадь квадрата, прямоугольника, фигур, составленных из прямоугольников, в том числе фигур,	Повышенный	4

Номер задания в работе	*Проверяемые умения*	*Уровень сложности задания*	*Примерное время выполнения, мин*
	изображенных на клетчатой бумаге		
8	Извлекать, анализировать, оценивать информацию, представленную в таблице, интерпретировать представленные данные, использовать данные при решении задач	Повышенный	4
9	Выполнять действия с обыкновенными и смешанными дробями в простейших случаях	Повышенный	4
10	Понимать и правильно употреблять термины, связанные с натуральными числами; сравнивать натуральные числа	Повышенный	4
11	Распознавать параллелепипед, использовать терминологию: вершина, ребро, грань, измерения; находить измерения параллелепипеда	Повышенный	4

Оценивание результатов выполнения работы: Задание считается выполненным верно, если ученик дал верный ответ и привел соответствующее ответу решение.

Критерии оценивания должны быть открыты для учащихся, с тем чтобы они понимали, как и за что выставляется та или иная отметка.

Контрольная работа и, соответственно, критерии оценки составлены таким образом, чтобы у учащихся было «право на ошибку» при выполнении работы как на «3», так и на «5».

Предлагаемые критерии оценивания носят рекомендательный характер и могут корректироваться учителем в зависимости от особенностей класса. Однако при этом целесообразно сохранять два описанных выше требования: надо, чтобы учащимся было объяснено, за что будет выставляться та или иная отметка; надо, чтобы у учащихся сохранялось «право на ошибку».

Задания 1*а*, 1*б*, 1*в*, 6*а*, 6*б*, 7*а*, 7*б*, 7*в* оцениваются как отдельные задания.

В таблице 4 приведено рекомендуемое наименьшее число заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить отметки «3», «4» и «5».

Таблица 4

Рекомендации по оценивания выполнения контрольной работы

Отметка	отметка «3»		отметка «4»		отметка «5»	
Выполнено верно	○	●	○	●	○	●
	9	–	11 9	– 1	10	2

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Сравните числа: ○ а) 42 982 и 42 592; ○ б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{9}$; ○ в) 6,25 и 6,52.

○ 2. Высота горы равна 5189 м. Сколько это примерно километров?

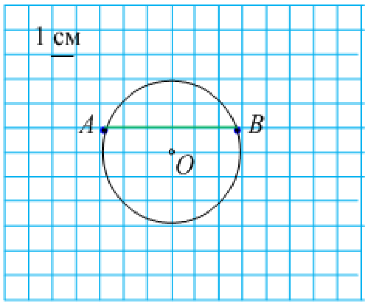
○ 3. Найдите значение выражения: (2560 – 1405) : 231.

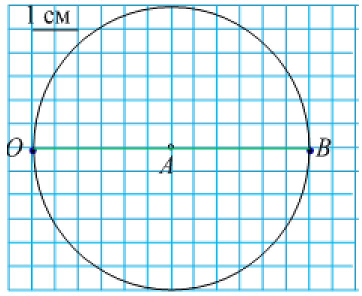
○ 4. Велотурист выбрал маршрут длиной 45 км. Он проехал по маршруту 2 ч со скоростью 14 км/ч. Сколько километров ему осталось проехать по маршруту?

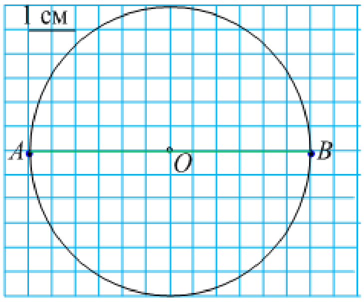
○ 5. Сначала Саша выучил $\frac{3}{10}$ стихотворения, затем – ещё $\frac{2}{5}$ этого стихотворения. Какую часть стихотворения ему осталось выучить?

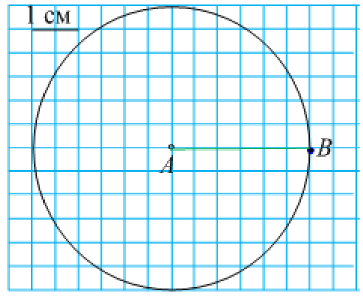
6. ○ а) Запишите номер рисунка, на котором верно выполнены построения: отметили точку O и провели окружность радиусом 3 см с центром в точке O; провели диаметр окружности и обозначили его AB.

○ б) Запишите длину диаметра построенной окружности.

1) 

3) 

2) 

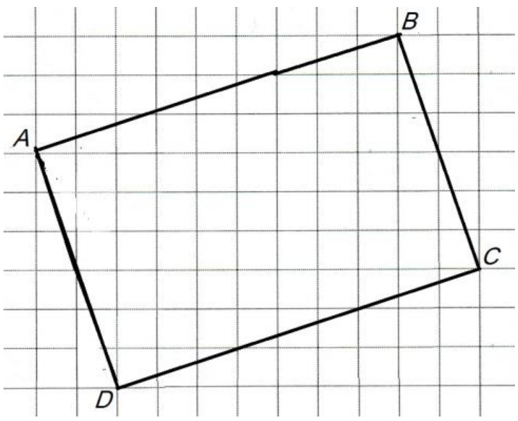
4) 

7. Выполните задания:

○ а) скопируйте прямоугольник $ABCD$ в тетрадь;

○ б) измерьте и запишите длины сторон прямоугольника $ABCD$;

● в) используя результаты измерений, вычислите площадь прямоугольника $ABCD$.



● 8. В таблице приведены результаты финального забега на 60 м четырёх участников школьных соревнований:

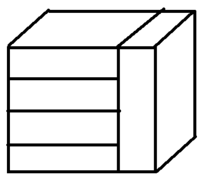
Номер дорожки	I	II	III	IV
Результат, *с*	10,40	12,09	11,10	10,04

Запишите номер дорожки, по которой бежал победитель школьных соревнований.

● 9. Найдите значение выражения: $2\frac{11}{18}-\frac{7}{8}:2\frac{1}{4}$.

● 10. Запишите наименьшее и наибольшее пятизначные числа, которые можно составить, используя два раза цифру 4 и три раза цифру 0.

● 11. Параллелепипед, изображённый на рисунке, сложен из пяти одинаковых брусков с измерениями 1 см, 4 см и 7 см. Определите измерения полученного параллелепипеда.



Вариант 2

1. Сравните числа: ○ а) 38 615 и 38 853; ○ б) $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{12}$; ○ в) 7,64 и 7,46.

○ 2. Глубина озера равна 1640 м. Сколько это примерно километров?

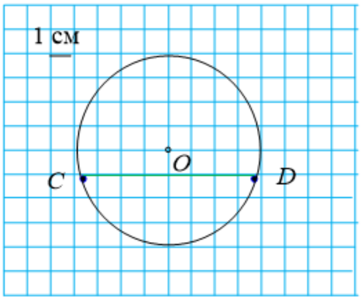
○ 3. Найдите значение выражения: (3540 – 1296) : 187.

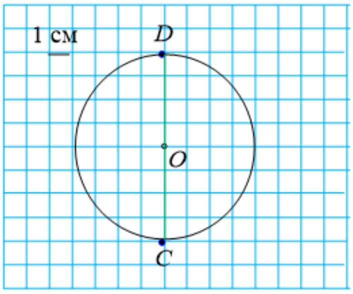
○ 4. Автотурист выбрал маршрут длиной 170 км. Он проехал по маршруту 3 ч со скоростью 52 км/ч. Сколько километров ему осталось проехать по маршруту?

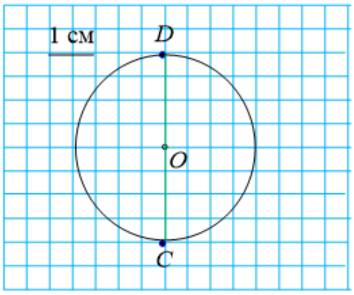
○ 5. Утром Таня прочитала $\frac{3}{8}$ рассказа, а вечером – ещё $\frac{1}{8}$ этого рассказа. Какую часть рассказа ей осталось прочитать?

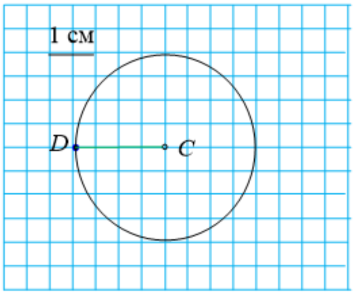
6. ○ а) Запишите номер рисунка, на котором верно выполнены построения: отметили точку *O* и провели окружность радиусом 4 см с центром в точке *O*; провели диаметр окружности и обозначили его *CD*.

○ б) Запишите длину диаметра построенной окружности.

1) 

2) 

3) 

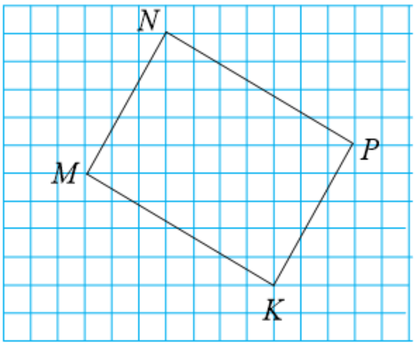
4) 

7. Выполните задания:

○ а) скопируйте прямоугольник *MNPK* в тетрадь;

○ б) измерьте и запишите длины сторон прямоугольника *MNPK*;

● в) используя результаты измерений, вычислите площадь прямоугольника *MNPK*.



● 8. В таблице приведены результаты финального забега на 30 м четырёх участников школьных соревнований:

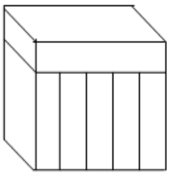
Номер дорожки	I	II	III	IV
Результат, *с*	5,20	5,25	5,04	6,10

Запишите номер дорожки, по которой бежал победитель школьных соревнований.

● 9. Найдите значение выражения: $3\frac{9}{21}-\frac{5}{9}:2\frac{1}{3}$.

● 10. Запишите наименьшее и наибольшее пятизначные числа, которые можно составить, используя три раза цифру 3 и два раза цифру 0.

● 11. Параллелепипед, изображённый на рисунке, сложен из пяти одинаковых брусков с измерениями 1 см, 3 см и 5 см. Определите измерения полученного параллелепипеда.



РАЗДЕЛ 2.
ОРГАНИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ 5-ГО КЛАССА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВНЫХ ТЕМ КУРСА МАТЕМАТИКИ

2.1. Смысловое чтение на уроках математики как основная предпосылка формирования предметных и метапредметных результатов обучения

2.1.1. Специфика смыслового чтения при изучении математики

Чтение учебного математического текста имеет свою специфику, отражающую специфику математики как области знания и как школьного предмета.

К особенностям собственно математического текста можно отнести то, что он написан на языке математики, в котором традиционно широко используется специальная символика. Немаловажным является и тот факт, что для математических текстов характерна абстрактность освещаемых вопросов, лаконичность изложения, строгое логическое построение (индуктивное или дедуктивное), использование математической символики, формул и выражений, наличие чертежей, графиков, содержательных иллюстраций, позволяющих перевести абстрактные понятия на язык образов и помочь читателю вскрыть существенные связи между рассматриваемыми объектами. Чтение такого текста требует определенного уровня развития читательской грамотности, сформированных навыков работы с информацией.

Нельзя не учитывать и то, что для подавляющего большинства единственными математическими текстами, которые человек прочитывает за свою жизнь, являются тексты школьных учебников математики. И значимость умения читать учебный математический текст заключается в том, что, во-первых, математика изучается на протяжении всех лет обучения в школе, а во-вторых, здесь могут быть сформированы такие качества чтения, которые необходимы при чтении текстов из других областей знания: четкое понимание того, «что дано и что надо доказать», умение структурировать информацию; осознанность логических следований и выводов, критичность в отношении высказанных утверждений, проверка их на правдоподобие, умение привести пример, чтобы подтвердить утверждение, или контрпример, если надо его опровергнуть, доказательность; умение применить полученную информацию, разобрать приведенный пример, привести свой и др.

Значимость учебных математических текстов определяется во многом тем, что в них, как правило, представлены все три типа учебных знаний:

- *декларативные* знания содержат сведения о математических объектах, их свойствах и отношениях; это знания теоретического характера, которые позволяют распознавать объекты, классифицировать их и т. п.;
- *процедурные* знания имеют практический характер, поскольку они содержат сведения о способах действий: правила арифметических действий, алгоритмы геометрических построений, алгебраических преобразований, методы решения задач и пр.;
- *ценностные* знания содержат сведения о важности математического факта, рациональности и эстетичности решения задачи; такого рода знание носит личностный характер.

Следует отметить, что для учебного математического текста характерным является перевод декларативных знаний в знания процедурные: мало знать формулировку теоремы Пифагора, от ученика требуется умение применить это знание при решении учебной или практической задачи.

Учебные математические тексты также имеют свою специфику, и, как следствие, чтение таких текстов имеет особенности, характер которых неодинаков.

Одна из таких специфических особенностей заключается в том, что в тексте учебника, как правило, встречаются ссылки на уже известный материал: правила, формулы, определения, теоремы и пр., и если ученик по какой-либо причине с этим материалом не знаком или забыл, он не всегда может восстановить этот пробел самостоятельно. Простое чтение в таких случаях приводит к недопониманию прочитанного, что влечет за собой неспособность применять полученную информацию и, как следствие, формализм процесса чтения.

Другая особенность работы с математическим текстом вытекает из его свернутости, что влечет необходимость интенсивной мыслительной деятельности при его чтении. Строгое логическое построение текста, доказательность рассуждений, определенная последовательность утверждений, наличие логических связок, сжатость изложения – все это требует напряжения мысли, сосредоточения. Кроме того, требуется и владение некоторыми специфическими способами чтения математических текстов – самостоятельного выполнения проводимых преобразований, включая восстановление опущенных шагов, выполнения чертежей и рисунков, необходимых для понимания текста, фиксации промежуточных выводов и пр.

Имеют свои особенности и учебные математические тексты, предназначенные для учащихся 5–6-х классов (возрастная категория – 10–12 лет). К ним можно отнести следующие:

1) текст учебника математики содержит, как правило, некоторый алгоритм, правило, описание последовательности действий, которые ученик должен освоить, научиться выполнять;

2) действия, которые надо освоить, разъясняются на примерах, иллюстрирующих их применение в конкретной ситуации;

3) текст может содержать логические обоснования описанных правил, алгоритмов, способов решения текстовых задач, доказательные рассуждения;

4) в тексте есть переходы от вербальной формы изложения информации к графической или символьной и наоборот;

5) текст может содержать фрагменты исторического характера, отсылки к определенной исторической и культурной эпохе.

И если говорить о навыках чтения учебных математических текстов учащимися 5–6-х классов, не надо забывать, что учебники математики для начальной школы, как правило, содержат лишь упражнения и задания и не содержат теоретические тексты. Поэтому можно утверждать, что учащиеся 5-го класса только начинают учиться читать математический текст, знакомятся с его разновидностями и особенностями. В этом им должна помочь специальным образом организованная деятельность.

Задания, которые необходимо выполнить ученику после прочтения текста, должны быть направлены на проверку общего понимания основной идеи текста, понимания изложенных в тексте отдельных фактов, отношений между объектами, способов действий, а также умения применить полученные сведения для решения задач, о которых в тексте не говорится.

Предполагается, что, отвечая на вопросы и выполняя задания, которые следуют за текстом, учащиеся в случае возникновения затруднений вернутся к тексту, прочтут фразу, фрагмент еще раз, обдумают вопрос, сравнят с заданием и пр., т. е. выполнят определенную работу по более глубокому и детальному пониманию текста.

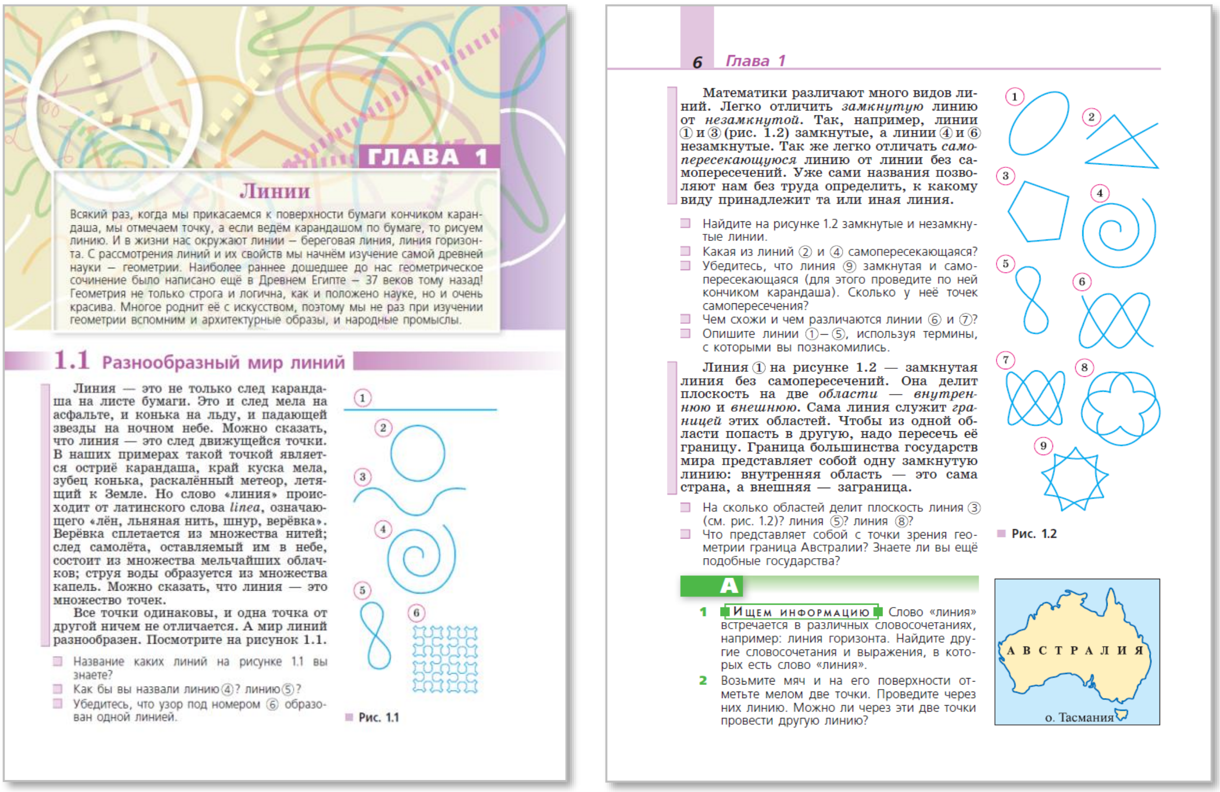
Задания и вопросы к тексту можно распределить на три группы:

Группа 1: задания на общее понимание текста, ориентацию в тексте. Это выражается, прежде всего, в умении определить тему и понять основную идею текста, выстроить логическую последовательность описанных событий, действий, осознать основные логические связи и отношения между изложенными фактами, найти в тексте необходимую информацию, представленную в явном виде, а также на основе фактов, имеющихся в тексте, сформулировать прямые выводы и заключения, переформулировать информацию.

Группа 2: задания на глубокое и детальное понимание содержания и формы текста. Проявляется это через умение проводить анализ представленной в тексте информации, интерпретировать ее, обобщать, формулировать на ее основе сложные выводы и оценочные суждения.

Группа 3: задания на использование информации из текста для различных целей. Выполнение таких заданий включает в себя использование информации, почерпнутой из текста, для решения задач, в тексте не описанных, в том числе требующих привлечения дополнительных знаний.

Проиллюстрируем сказанное на примере одного из учебников, входящих в федеральный перечень: «Математика, 5 класс» (под редакцией Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина), п. 1.1 «Разнообразный мир линий».



ГЛАВА 1

Линии

Всякий раз, когда мы прикасаемся к поверхности бумаги кончиком карандаша, мы отмечаем точку, а если ведём карандашом по бумаге, то рисуем линию. И в жизни нас окружают линии – береговая линия, линия горизонта. С рассмотрения линий и их свойств мы начнём изучение самой древней науки – геометрии. Наиболее раннее дошедшее до нас геометрическое сочинение было написано ещё в Древнем Египте – 37 веков тому назад! Геометрия не только строга и логична, как и положено науке, но и очень красива. Многое роднит её с искусством, поэтому мы не раз при изучении геометрии вспомним и архитектурные образы, и народные промыслы.

1.1 Разнообразный мир линий

Линия — это не только след карандаша на листе бумаги. Это и след мела на асфальте, и конька на льду, и падающей звезды на ночном небе. Можно сказать, что линия — это след движущейся точки. В наших примерах такой точкой является остриё карандаша, край куска мела, зубец конька, раскалённый метеор, летящий к Земле. Но слово «линия» происходит от латинского слова *linea*, означающего «лён, льняная нить, шнур, верёвка». Верёвка сплетается из множества нитей; след самолёта, оставляемый им в небе, состоит из множества мельчайших облачков; струя воды образуется из множества капель. Можно сказать, что линия — это множество точек.

Все точки одинаковы, и одна точка от другой ничем не отличается. А мир линий разнообразен. Посмотрите на рисунок 1.1.

- Название каких линий на рисунке 1.1 вы знаете?
- Как бы вы назвали линию ④? линию ⑤?
- Убедитесь, что узор под номером ⑥ образован одной линией.

Рис. 1.1

Математики различают много видов линий. Легко отличить *замкнутую* линию от *незамкнутой*. Так, например, линии ① и ③ (рис. 1.2) замкнутые, а линии ④ и ⑥ незамкнутые. Так же легко отличать *самопересекающуюся* линию от линии без самопересечений. Уже сами названия позволяют нам без труда определить, к какому виду принадлежит та или иная линия.

- Найдите на рисунке 1.2 замкнутые и незамкнутые линии.
- Какая из линий ② и ④ самопересекающаяся?
- Убедитесь, что линия ⑨ замкнутая и самопересекающаяся (для этого проведите по ней кончиком карандаша). Сколько у неё точек самопересечения?
- Чем схожи и чем различаются линии ⑥ и ⑦?
- Опишите линии ①–⑤, используя термины, с которыми вы познакомились.

Линия ① на рисунке 1.2 — замкнутая линия без самопересечений. Она делит плоскость на две *области* — *внутреннюю* и *внешнюю*. Сама линия служит *границей* этих областей. Чтобы из одной области попасть в другую, надо пересечь её границу. Граница большинства государств мира представляет собой одну замкнутую линию: внутренняя область — это сама страна, а внешняя — заграница.

- На сколько областей делит плоскость линия ③ (см. рис. 1.2)? линия ⑤? линия ⑧?
- Что представляет собой с точки зрения геометрии граница Австралии? Знаете ли вы ещё подобные государства?

Рис. 1.2

А

1 Ищем информацию Слово «линия» встречается в различных словосочетаниях, например: линия горизонта. Найдите другие словосочетания и выражения, в которых есть слово «линия».

2 Возьмите мяч и на его поверхности отметьте мелом две точки. Проведите через них линию. Можно ли через эти две точки провести другую линию?

Рис. 1

Текст пункта разбит на 3 фрагмента, в которых заключен блок информации. Фрагменты должны быть разобраны последовательно. Сделать это можно как на одном уроке, так и на разных, работать с текстом можно фронтально или индивидуально (в частности, можно дать и в качестве домашнего задания).

После каждого фрагмента текста в учебнике даны вопросы, позволяющие ученику понять содержание текста. Однако начать работу с фрагментом можно с задания озаглавить его. Например, первый фрагмент можно озаглавить «Что такое линия?», второй – «Виды линий», третий – «Замкнутые линии». Это задание относится к группе 1. К этой же группе принадлежит задание найти в тексте ответ на вопрос, что такое линия: это след движущейся точки и это множество точек.

Вопросы к первому фрагменту также принадлежат к группе 1: все они помогают определить основную тему и понять основную идею текста, осознать основные связи и отношения между предлагаемыми объектами, распознавать линии знакомые, незнакомые или необычные.

Большая часть вопросов, приведенных ко второму фрагменту, относятся к группе 2: они предлагают на основе информации из текста сформулировать выводы и сделать заключения, например провести аналогию с линиями 1 и 3 и определить, какие еще линии являются замкнутыми, а на основании аналогии с линиями 2 и 4 – незамкнутыми. Здесь скрыты сложные логические операции сравнения (выделения общего и различий), аналогии, что более характерно для группы 2, однако сами объекты исследования интуитивно понятные, знакомые по традиционной для детей деятельности рисования, а геометрические отношения носят топологический характер, т. е. это отношения, формируемые еще в дошкольном детстве. Это отсылка к интуиции ребенка, к его опыту. Точно так же и вопрос 3 о распознавании самопересекающейся линии можно отнести к этой группе: в тексте нет определения, нет явного указания, есть отсылка к словообразованию термина – термин должен рассказать о себе сам. Аналогично этому задания на сравнение и описание линий потребуют применения всех новых терминов, используемых в тексте.

А вот последний вопрос – о государственной границе Австралии – относится уже к третьей группе, поскольку требует применения полученной ранее информации в новом контексте, применения математических представлений и понятий к другим областям знания.

2.1.2. Методы и приемы работы с учебником в 5-м классе

История российского учебника по математике берет начало в 1703 году. «Арифметика» Магницкого составлена так, что является и учебником, и энциклопедией самых разных знаний: тут есть и поэтические вставки, и обширные поясняющие тексты, и философские рассуждения. Даже иллюстрации здесь являются символическими аллегориями: заставляют не только любоваться, но и задумываться.

Рис. 2

В век компьютерных технологий учебник остается главным средством обучения в школе. Каким должен быть современный учебник математики? Какие современные методы нужно использовать в работе с учебником?

Современный учебник математики соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования и Примерной рабочей программе основного общего образования, а также учитывает индивидуальные и возрастные особенности учащихся. Он является не только источником информации, но и системы интеллектуального развития школьника. Ведущая роль учебника заключается в том, что его функции позволяют проектировать деятельность учителя и деятельность учащегося. Поэтому перед учителем встает задача выстраивания системы работы с учебником, используя его многофункциональный методический аппарат.

На протяжении многих десятилетий в России сформировалась традиционная система обучения, построенная на триаде: ученик – учитель – учебник. Достижение учащимися планируемых результатов возможно лишь в том случае, если все объекты данной системы тесно функционируют друг с другом.

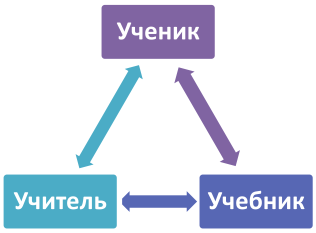


Рис. 3

В XX веке учебник математики был прежде всего носителем системы знаний, иногда, но не всегда, и системы заданий и упражнений, направленных на овладение теорией. Достаточно вспомнить учебник геометрии А. П. Киселева, который использовался в школе более 50 лет, и дополнявший его задачник Н. А. Рыбкина.

В XXI веке многое изменилась. Изменился и учебник. Современный учебник математики – не просто хранилище правил, он снова, как и самый первый российский учебник петровских времен, становится своего рода энциклопедией освоения математических знаний, помощником на сложном пути изучения математики.

Современные реалии мировой информатизации добавили в эту схему компьютер, который расширяет возможности получения знаний, но не является полной заменой учебника!

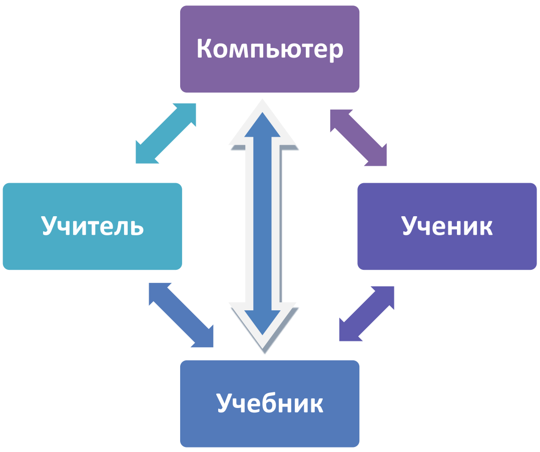


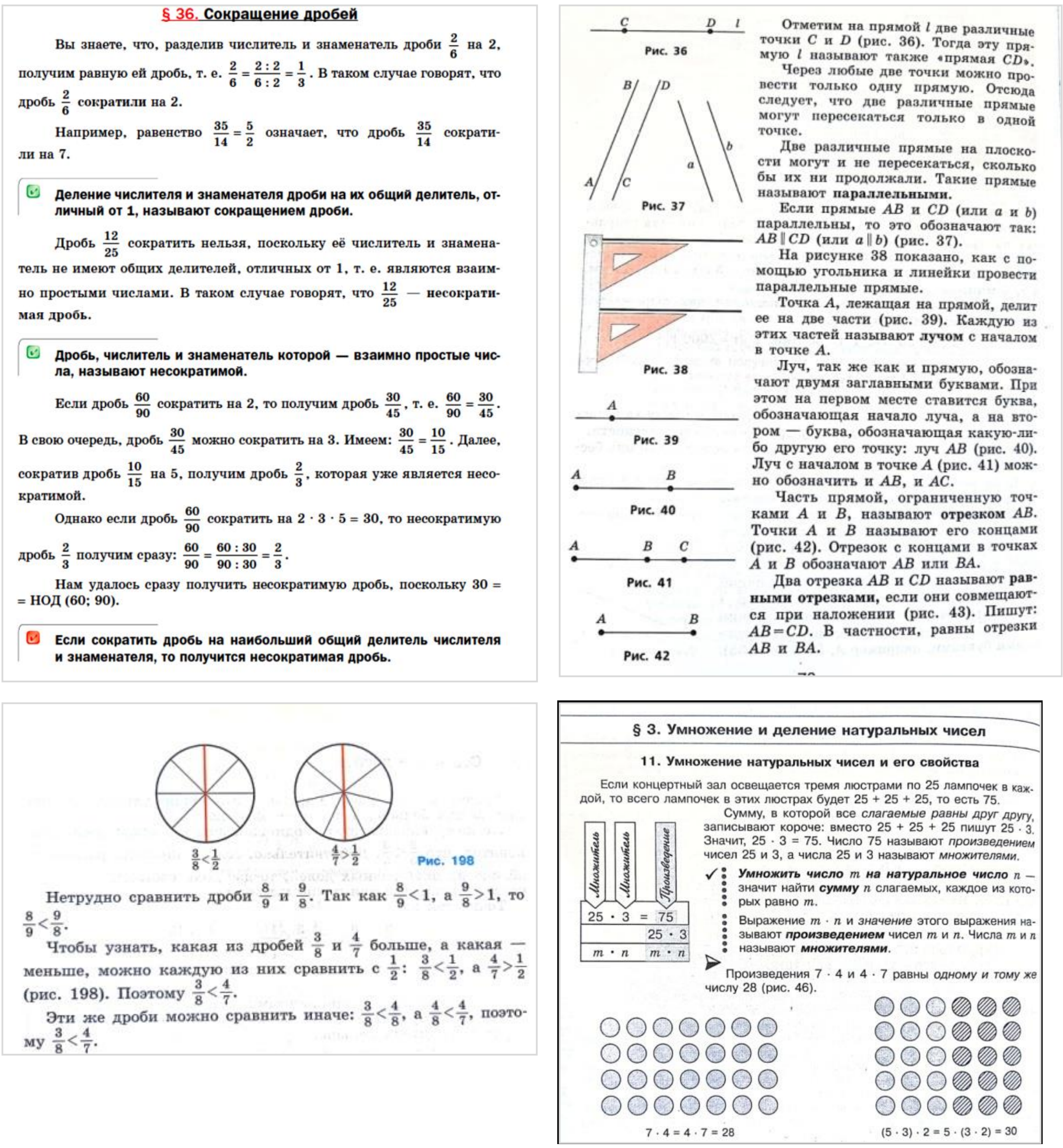
Рис. 4

Формирование умений и навыков работы с учебником у учащихся закладывается в начальной школе. Но при переходе в основную школу учащиеся сталкиваются с учебниками более высокого уровня научности и сложности. Учебники математики для начальной школы, как правило, содержат лишь упражнения и задания и не содержат теоретические тексты. Поэтому можно утверждать, что учащиеся 5-го класса только начинают учиться работать с математическими текстами, знакомятся с их разновидностями и особенностями. Однако, несмотря на это, в математических текстах для пятиклассников уже присутствуют все основные особенности математического текста, отражающие специфику математики как области знания и как учебного предмета:

1. Текст учебника содержит алгоритм, правило, описание последовательности действий, которые ученик должен научиться выполнять, т. е. общий способ действия
2. Действия, которые надо освоить, разъясняются на примерах, иллюстрирующих их применение в конкретной ситуации, т. е. от общего перейти к частному
3. Текст может содержать логические обоснования описанных правил, алгоритмов, способов решения текстовых задач, доказательные рассуждения. Рассуждения могут быть индуктивными или дедуктивными
4. В тексте есть переходы от вербальной формы изложения информации к графической или символьной и наоборот, т. е. необходимо работать с информацией разных по форме представления видов
5. Текст может содержать фрагменты исторического характера, отсылки к определенной исторической, культурной эпохе

Рис. 5

Пятиклассники уже работают с математической символикой и графикой, следовательно, от них требуется перевод абстрактных понятий на язык образов, что поможет школьнику вскрыть существенные связи между рассматриваемыми объектами. Приведем в качестве иллюстрации страницы из различных учебников для учащихся 5-го класса, раскрывающие высказанные соображения.



§ 36. Сокращение дробей

Вы знаете, что, разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{6}$ на 2, получим равную ей дробь, т. е. $\frac{2}{6}=\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{3}$. В таком случае говорят, что дробь $\frac{2}{6}$ сократили на 2.

Например, равенство $\frac{35}{14}=\frac{5}{2}$ означает, что дробь $\frac{35}{14}$ сократили на 7.

Деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель, отличный от 1, называют сокращением дроби.

Дробь $\frac{12}{25}$ сократить нельзя, поскольку её числитель и знаменатель не имеют общих делителей, отличных от 1, т. е. являются взаимно простыми числами. В таком случае говорят, что $\frac{12}{25}$ — несократимая дробь.

Дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа, называют несократимой.

Если дробь $\frac{60}{90}$ сократить на 2, то получим дробь $\frac{30}{45}$, т. е. $\frac{60}{90}=\frac{30}{45}$. В свою очередь, дробь $\frac{30}{45}$ можно сократить на 3. Имеем: $\frac{30}{45}=\frac{10}{15}$. Далее, сократив дробь $\frac{10}{15}$ на 5, получим дробь $\frac{2}{3}$, которая уже является несократимой.

Однако если дробь $\frac{60}{90}$ сократить на $2\cdot3\cdot5=30$, то несократимую дробь $\frac{2}{3}$ получим сразу: $\frac{60}{90}=\frac{60:30}{90:30}=\frac{2}{3}$.

Нам удалось сразу получить несократимую дробь, поскольку 30 = = НОД (60; 90).

Если сократить дробь на наибольший общий делитель числителя и знаменателя, то получится несократимая дробь.

Рис. 36

Рис. 37

Рис. 38

Рис. 39

Рис. 40

Рис. 41

Рис. 42

Отметим на прямой l две различные точки C и D (рис. 36). Тогда эту прямую l называют также «прямая CD».

Через любые две точки можно провести только одну прямую. Отсюда следует, что две различные прямые могут пересекаться только в одной точке.

Две различные прямые на плоскости могут и не пересекаться, сколько бы их ни продолжали. Такие прямые называют **параллельными.**

Если прямые AB и CD (или a и b) параллельны, то это обозначают так: $AB \parallel CD$ (или $a \parallel b$) (рис. 37).

На рисунке 38 показано, как с помощью угольника и линейки провести параллельные прямые.

Точка A, лежащая на прямой, делит ее на две части (рис. 39). Каждую из этих частей называют **лучом** с началом в точке A.

Луч, так же как и прямую, обозначают двумя заглавными буквами. При этом на первом месте ставится буква, обозначающая начало луча, а на втором — буква, обозначающая какую-либо другую его точку: луч AB (рис. 40). Луч с началом в точке A (рис. 41) можно обозначить и AB, и AC.

Часть прямой, ограниченную точками A и B, называют **отрезком** AB. Точки A и B называют его концами (рис. 42). Отрезок с концами в точках A и B обозначают AB или BA.

Два отрезка AB и CD называют **равными отрезками,** если они совмещаются при наложении (рис. 43). Пишут: $AB=CD$. В частности, равны отрезки AB и BA.

$\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}>\frac{1}{2}$

Рис. 198

Нетрудно сравнить дроби $\frac{8}{9}$ и $\frac{9}{8}$. Так как $\frac{8}{9}<1$, а $\frac{9}{8}>1$, то $\frac{8}{9}<\frac{9}{8}$.

Чтобы узнать, какая из дробей $\frac{3}{8}$ и $\frac{4}{7}$ больше, а какая — меньше, можно каждую из них сравнить с $\frac{1}{2}$: $\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$, а $\frac{4}{7}>\frac{1}{2}$ (рис. 198). Поэтому $\frac{3}{8}<\frac{4}{7}$.

Эти же дроби можно сравнить иначе: $\frac{3}{8}<\frac{4}{8}$, а $\frac{4}{8}<\frac{4}{7}$, поэтому $\frac{3}{8}<\frac{4}{7}$.

§ 3. Умножение и деление натуральных чисел

11. Умножение натуральных чисел и его свойства

Если концертный зал освещается тремя люстрами по 25 лампочек в каждой, то всего лампочек в этих люстрах будет 25 + 25 + 25, то есть 75.

Сумму, в которой все *слагаемые равны друг другу*, записывают короче: вместо 25 + 25 + 25 пишут $25\cdot3$. Значит, $25\cdot3=75$. Число 75 называют *произведением* чисел 25 и 3, а числа 25 и 3 называют *множителями*.

Множитель Множитель Произведение

$25\cdot3=75$

$25\cdot3$

$m\cdot n$ $m\cdot n$

Умножить число m на натуральное число n — значит найти ***сумму*** n слагаемых, каждое из которых равно m.

Выражение $m\cdot n$ и *значение* этого выражения называют ***произведением*** чисел m и n. Числа m и n называют ***множителями***.

Произведения $7\cdot4$ и $4\cdot7$ равны *одному и тому же* числу 28 (рис. 46).

$7\cdot4=4\cdot7=28$

$(5\cdot3)\cdot2=5\cdot(3\cdot2)=30$

Рис. 6

Работа с такими текстами требует от школьника определенного уровня развития читательской грамотности и навыков работы с информацией.

Кто же, как не учитель математики, поможет своим ученикам овладеть умением читать учебный математический текст и развить навыки смыслового чтения?

Как же научить пятиклассников самостоятельно и эффективно работать с учебником математики?

Для этого целесообразно организовать систематическую работу учащихся с учебником математики на уроке и дома. Если ученик умеет работать с учебником, в случае необходимости он сможет учиться дистанционно и самостоятельно. Это необходимый этап на пути к самообразованию.

В системной работе по формированию умений и навыков работы учащихся с учебником выделим четыре основных направления:

Рис. 7

- *Рассмотрим направление «Знакомство учащихся с учебником».*

На первом уроке математики в 5-м классе – уроке знакомства – необходимо представить учащимся учебник математики, который будет их незаменимым помощником на протяжении всего учебного года.

Прежде всего учитель может рассказать учащимся об авторах учебника. Например, Сергей Михайлович Никольский был известным ученым-математиком, внес большой вклад в ее развитие, его научные работы помогали во время Великой отечественной войны и в мирное время. Он прожил очень долгую жизнь – более 105 лет, воспитал многих замечательных ученых, которые продолжили развивать его научные идеи. Помимо этого, он смог организовать коллектив для создания учебников для школьников, т. к. хотел помочь им полюбить математику, которой он посвятил свою жизнь, и овладеть ее премудростями. Авторский коллектив во главе с Сергеем Михайловичем Никольским создал семь учебников: «Арифметика» для 5-го и 6-го классов, учебники «Алгебра» для 7-го, 8-го и 9-го классов, «Алгебра и начала анализа» для 10-го и 11-го классов.

Чтобы учащиеся могли эффективно пользоваться учебником и хорошо в нем ориентироваться, полезно разобрать все условные обозначения, принятые в нем, демонстрируя их использование на конкретных примерах.

Следует разъяснить назначение и использование рубрик «Алфавитно-предметный указатель», «Ответы и указания к упражнениям», «Справочные материалы», а также других рубрик конкретного учебника. В учебниках математики для начальной школы, как правило, таких рубрик нет, поэтому работать с ними учащиеся пока не умеют.

После знакомства с учебником можно провести игру «Путешествие по учебнику математики», в которой у учащихся сформируются умения ориентироваться в учебнике и осознанно использовать многие его функции.

Проведем данную игру на примере учебника «Математика. 5 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир).

ИГРА «ПУТЕШЕСТВИЕ ПО УЧЕБНИКУ МАТЕМАТИКИ»

Образовательные задачи:

- познавательная: развивает умение ориентироваться в учебнике;
- коммуникативно-развивающая: формирует навыки общения между учащимися.

Подготовительный этап: сформируйте 3–4 команды.

Задание. Расшифруйте фамилию автора первого в России учебника по математике.

а	В разделе «Алфавитно-предметный указатель» найдите номер страницы, на которой вводится понятие «Числа натуральные».
й	Сколько кладоискателей изображено на иллюстрации к параграфу 28?
ц	В каком из параграфов – 10, 15 или 38 – представлены 4 задачи?
м	На странице 193 найдите номер задания для домашней работы.
к	В разделе «Ответы и указания к упражнениям» найдите ответ к заданию 489 (1).
и	Сколько задач высокой сложности содержится в рубрике «Упражнения» параграфа 23?
н	Найдите количество букв в названии товара, который продавал кот Матроскин в задаче 324.
о	В задании 727 найдите информацию о том, сколько килограммов составляет масса осколка Царь-колокола.
г	Найдите номер параграфа «Площадь. Площадь многоугольника».

765	**5**	**21**	**6**	**1**	**15**	**16**	**1**	**4**

Побеждает команда, выполнившая задание первой. Ответ: Магницкий.

Включение всех учащихся в активную учебную игру на уроке позволит не только формировать нужную мотивацию к работе с учебником, интерес к изучению предмета, но и при правильной организации со стороны учителя послужит формированию коммуникативных компетенций учащихся.

- *Рассмотрим направление «Работа учащихся с теоретическими материалами учебника».*

Значимость учебных математических текстов определяется во многом тем, что в них, как правило, представлены все три типа учебных знаний: декларативные, процедурные, ценностные. Однако характерным для учебного математического текста, предназначенного для пятиклассников, является перевод декларативных знаний в знания процедурные: ведь недостаточно знать только правило, например сложения десятичных дробей, от учащегося требуется умение применять это правило при решении учебной или практической задачи и, конечно, в реальных жизненных ситуациях.

Большое внимание необходимо уделить формированию умения самостоятельной работы учащихся с учебными материалами по каждой теме. Эта работа может включать несколько этапов, при этом после прохождения каждого этапа учащийся должен задать себе соответствующий вопрос (см. таблицу 5).

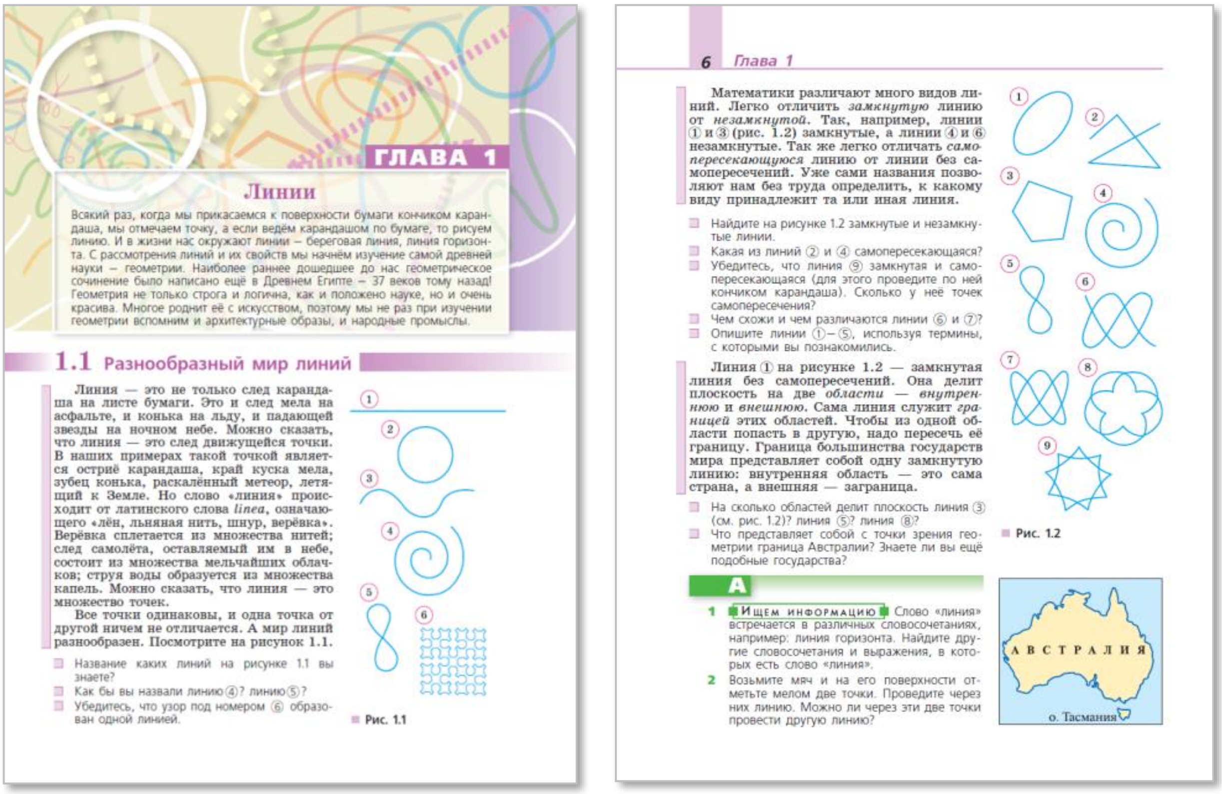
Таблица 5

Этапы смыслового чтения

Этапы	*Вопросы учащегося*
1. Проанализировать название темы (параграфа)	– Что я уже знаю об этом? – Что я узнаю?
2. Ознакомиться с содержанием параграфа	– Что нового я узнал?
3. Разбить текст на фрагменты и озаглавить их	– Из каких фрагментов состоит текст?
4. Выделить новые понятия. Выделить главные понятия	– Какие новые понятия я узнал?

Этапы	*Вопросы учащегося*
	– Какие понятия можно назвать главными в прочитанном разделе?
5. Выделить правила и свойства	– Что позволяет выполнять данное правило? – Какими свойствами обладает данное понятие?
6. Разобрать приведенные в параграфе решения примеров. Повторить самостоятельно	– Понятно ли мне применение теоретических знаний по данной теме при решении задач? – Смогу ли я самостоятельно повторить все разобранные действия?
7. Ответить на вопросы параграфа	– На все ли вопросы удалось ответить? – Все ли мне понятно в данной теме?
8. Привести и разобрать собственные примеры или задачи по данной теме	– В каких случаях можно применить материалы данной темы?
9. Найти примеры применения знаний в жизненных ситуациях или в других учебных дисциплинах	– Как я могу применить полученные знания в жизни или на уроках по другим предметам?

Проиллюстрируем третий этап работы на примере одного из учебников, входящих в федеральный перечень: «Математика, 5 класс» (под редакцией Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина).



ГЛАВА 1

Линии

Всякий раз, когда мы прикасаемся к поверхности бумаги кончиком карандаша, мы отмечаем точку, а если ведём карандашом по бумаге, то рисуем линию. И в жизни нас окружают линии – береговая линия, линия горизонта. С рассмотрения линий и их свойств мы начнём изучение самой древней науки – геометрии. Наиболее раннее дошедшее до нас геометрическое сочинение было написано ещё в Древнем Египте – 37 веков тому назад! Геометрия не только строга и логична, как и положено науке, но и очень красива. Многое роднит её с искусством, поэтому мы не раз при изучении геометрии вспомним и архитектурные образы, и народные промыслы.

1.1 Разнообразный мир линий

Линия — это не только след карандаша на листе бумаги. Это и след мела на асфальте, и конька на льду, и падающей звезды на ночном небе. Можно сказать, что линия — это след движущейся точки. В наших примерах такой точкой является остриё карандаша, край куска мела, зубец конька, раскалённый метеор, летящий к Земле. Но слово «линия» происходит от латинского слова *linea*, означающего «лён, льняная нить, шнур, верёвка». Верёвка сплетается из множества нитей; след самолёта, оставляемый им в небе, состоит из множества мельчайших облачков; струя воды образуется из множества капель. Можно сказать, что линия — это множество точек.

Все точки одинаковы, и одна точка от другой ничем не отличается. А мир линий разнообразен. Посмотрите на рисунок 1.1.

- Название каких линий на рисунке 1.1 вы знаете?
- Как бы вы назвали линию ④? линию ⑤?
- Убедитесь, что узор под номером ⑥ образован одной линией.

Рис. 1.1

Математики различают много видов линий. Легко отличить *замкнутую* линию от *незамкнутой*. Так, например, линии ① и ③ (рис. 1.2) замкнутые, а линии ④ и ⑥ незамкнутые. Так же легко отличать *самопересекающуюся* линию от линии без самопересечений. Уже сами названия позволяют нам без труда определить, к какому виду принадлежит та или иная линия.

- Найдите на рисунке 1.2 замкнутые и незамкнутые линии.
- Какая из линий ② и ④ самопересекающаяся?
- Убедитесь, что линия ⑨ замкнутая и самопересекающаяся (для этого проведите по ней кончиком карандаша). Сколько у неё точек самопересечения?
- Чем схожи и чем различаются линии ⑥ и ⑦?
- Опишите линии ①–⑤, используя термины, с которыми вы познакомились.

Линия ① на рисунке 1.2 — замкнутая линия без самопересечений. Она делит плоскость на две *области* — *внутреннюю* и *внешнюю*. Сама линия служит *границей* этих областей. Чтобы из одной области попасть в другую, надо пересечь её границу. Граница большинства государств мира представляет собой одну замкнутую линию: внутренняя область — это сама страна, а внешняя — заграница.

- На сколько областей делит плоскость линия ③ (см. рис. 1.2)? линия ⑤? линия ⑧?
- Что представляет собой с точки зрения геометрии граница Австралии? Знаете ли вы ещё подобные государства?

Рис. 1.2

А

1 Ищем информацию Слово «линия» встречается в различных словосочетаниях, например: линия горизонта. Найдите другие словосочетания и выражения, в которых есть слово «линия».

2 Возьмите мяч и на его поверхности отметьте мелом две точки. Проведите через них линию. Можно ли через эти две точки провести другую линию?

Рис. 8

Посмотрите: учебный текст пункта «Разнообразный мир линий» разбит на 3 фрагмента, в каждом из которых заключен небольшой законченный по смыслу блок информации.

Читать текст целесообразно по фрагментам.

Особенностью данных фрагментов является то, что в них представлена как вербальная информация, так и графическая. Надо научить учащихся правильно читать такого рода тексты – при чтении обращать внимание на рисунки: остановиться при виде ссылки на рисунок, найти на рисунке все объекты, что описаны в тексте, сопоставить их, определить, есть ли еще изображения или иная информация.

Фрагменты не озаглавлены. Поэтому после того, как фрагмент прочитан, рисунки изучены, можно озаглавить фрагменты, например, так: первый фрагмент назвать «Что такое линия», второй – «Виды линий», третий – «Замкнутые линии». Это помогает «вытащить» «главное действующее лицо» – основное понятие, главную мысль, – сфокусировать на них внимание учащихся.

После каждого фрагмента приводятся вопросы и задания, относящиеся к этому фрагменту. Они могут еще раз отослать ученика к тексту, чтобы обратить его внимание на важную деталь, которая не представлена в явном виде, выразить мысль иными словами, использовать иные формулировки или понятия.

Проанализируем, например, вопросы к первому фрагменту: первый вопрос направлен на актуализацию памяти ученика и его геометрических представлений, второй вопрос – на актуализацию воображения, ассоциаций, третий вопрос – на формирование критического мышления, так как побуждает не принимать на веру, а проверять и убеждаться самостоятельно. Все это помогает выявить новые детали, свойства или связи, а в итоге – глубже и прочнее овладеть понятием.

Изучать этот материал можно как на одном уроке, так и на разных, выбрав для организации работы с текстом как фронтальную форму, так и индивидуальную (в частности, можно предложить такой вид работы и в качестве домашнего задания).

- *Рассмотрим направление «Работа с задачными материалами в учебнике».*

Задания расположены, как правило, после текста параграфа, а их выполнение предусмотрено только после изучения теоретического материала.

При выполнении заданий у ученика могут возникнуть вопросы или затруднения. Но если им хорошо проработана теория, то он всегда сможет снова обратиться к правилам, разобранным примерам выполнения вычислений или решения задач. При этом они уже будут наполнены собственными действиями ученика, его размышлениями.

Как воспользоваться текстом, если разобрано несколько примеров или различных случаев?

Прочитать фрагмент параграфа.

Прочитать формулировку определения, правила или свойства.

Разобрать решения аналогичного примера в тексте параграфа.

И таким образом выполнить определенную работу по более глубокому и детальному пониманию текста.

Если в системе упражнений учебника приводятся образцы выполнения действий, записи операций или решения задач, то учащиеся легко смогут научиться их разбирать и переносить этот образец на решение других примеров.

Рассмотрим несколько вариантов использования образцов из учебника серии «Сферы» (авт. Е.А. Бунимович и др.).

Пример 1. Учащимся предлагается задание:

Назовите числа сначала в порядке возрастания, а потом в порядке убывания; в каждом случае запишите цепочку неравенств:

а) 89, 61, 88, 49; б) 576, 675, 568, 615.

Образец. $3 < 7 < 12 < 20$; $20 > 12 > 7 > 3$.

Записывать числа в порядке возрастания через запятую учащиеся умеют, можно записать это же с использованием знака сравнения, что и показано в образце.

Пример 2. В образце показано, как следует выполнять задание, т. е. последовательность действий, которые приводят к ответу.

Выразите приближённо:

а) 19 мм в сантиметрах; г) 359 см в дециметрах;

б) 28 см в дециметрах; д) 482 см в метрах;

в) 423 см в метрах; е) 5621 м в километрах.

Образец. Выразим приближённо 6789 м в километрах. Так как 1 км = = 1000 м, то число 6789 надо округлить до тысяч: 6789 м $\approx$ 7000 м = 7 км.

Пример 3. В этом образце дается решение, которое содержит рассуждение, надо прочесть и понять его логику:

Верно ли равенство:

а) $\frac{15}{25} = \frac{12}{20}$; б) $\frac{20}{28} = \frac{30}{36}$; в) $\frac{16}{28} = \frac{24}{42}$; г) $\frac{12}{27} = \frac{24}{56}$?

Образец. Верно ли равенство $\frac{4}{6} = \frac{6}{10}$?

Решение. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$, значит, $\frac{4}{6} \neq \frac{6}{10}$. Равенство неверно.

- *Рассмотрим направление «Работа с дополнительными материалами в учебнике».*

Как правило, в учебниках по математике для учащихся 5-го класса можно выделить следующие типы дополнительных рубрик:

- Исторические сведения
- Занимательные задачи
- Дополнительные темы

Использование элементов истории в курсе математики должно помочь в овладении содержанием изучаемого материала и послужить расширению математического кругозора учащихся. В таблице 6 представлено соответствие содержания учебного курса математики 5-го класса и содержания исторических материалов. Если в учебнике таких материалов нет, можно использовать дополнительную литературу, тексты, задачи.

Таблица 6

Соответствие содержания учебного курса математики 5-го класса и содержания исторических материалов

Содержание учебного курса	*Содержание исторического материала*
Натуральные числа и нуль	Обозначение цифр в Древней Руси. История формирования математических символов. Число нуль. Позиционные системы счисления. Римская система счисления. Вавилонская нумерация. Египетская нумерация. Десять индусских цифр. Решето Эратосфена. Совершенные числа. Дружественные числа

Содержание учебного курса	*Содержание исторического материала*
Дроби	История появления дробей. Открытие десятичных дробей. Дроби в Вавилоне, Египте, Риме, на Руси
Решение текстовых задач	Л. Ф. Магницкий и его книга «Арифметика». История возникновения диаграмм
Наглядная геометрия	Метрическая система мер. Старинные русские меры длины

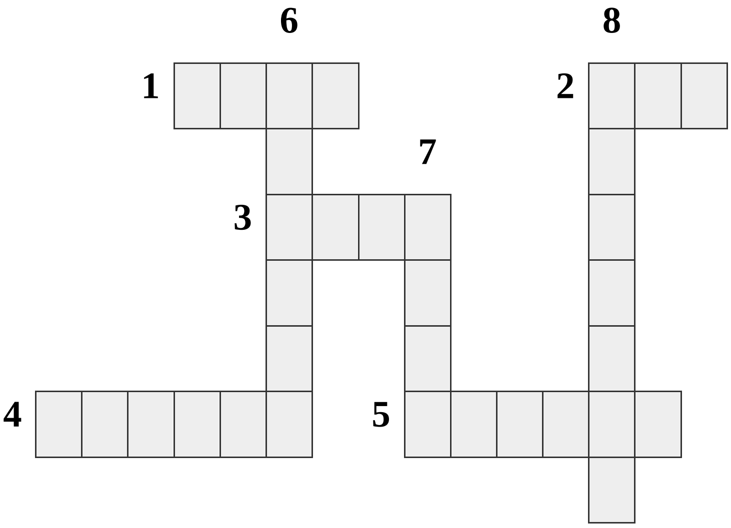
Интерес к предмету и получению новых знаний вырабатывается в том случае, когда материалы интересны по содержанию, например, интересные факты, новые способы решения, нестандартные задачи.

Учителю необходимо организовать процесс обучения таким образом, чтобы каждый ученик мог принять активное участие в получении новых исторических знаний.

Для этого можно использовать следующие формы работы: эвристическая беседа, проблемное изложение, исследовательская работа, кейс-метод, исторические экскурсы, математические игры и соревнования, решение исторических задач, графическое представление новой информации (например, инфографика).

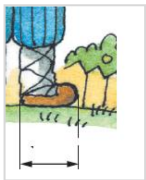
Работе с понятиями может служить и такое задание, как разгадывание кроссворда, поскольку здесь можно акцентировать внимание на термине и его происхождении, на деталях понятия или на его обобщении, представить информацию нетрадиционно (использовать изображения). Например, после работы с материалами «От локтей и ладоней к метрической системе» для активизации знаний можно использовать кроссворд.

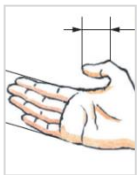
Кроссворд «От локтей и ладоней к метрической системе»

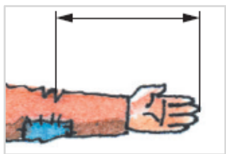


По горизонтали.

1. Приставка слова, которая означает увеличение в 1000 раз.

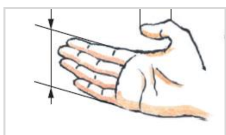
2. Мера длины: 

3. Мера длины: 

4. Мера длины: 

5. Страна, в которой метрическую систему мер начали вводить с конца XIX в.

По вертикали.

6. Мера длины: 

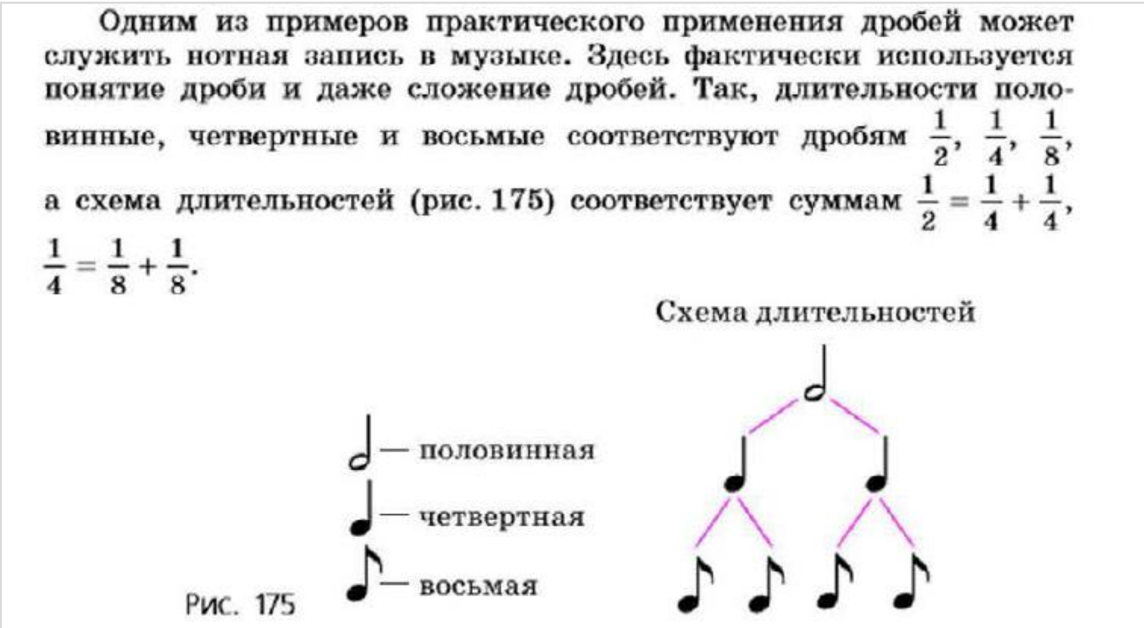
7. Это слово происходит от греческого слова «метрон».

8. Страна, в которой в 1790 г. в Национальное собрание было внесено предложение о создании новой системы мер.

Самостоятельная работа учащихся с такого рода материалами может содержать такие же этапы, как и в случае работы с теоретическими материалами.

В системной работе с дополнительными материалами можно применять творческие работы, проектную деятельность, игровые технологии.

В текстах может содержаться не только математическая информация, но и информация из других сфер деятельности человека. Например, в одном из учебников в рубрике «Исторические сведения» можно найти текст о применении дробей в музыке.



Одним из примеров практического применения дробей может служить нотная запись в музыке. Здесь фактически используется понятие дроби и даже сложение дробей. Так, длительности половинные, четвертные и восьмые соответствуют дробям $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, а схема длительностей (рис. 175) соответствует суммам $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$.

Рис. 9

Этот текст может стать основой для выполнения проектной работы по теме «Математика в музыке». Это будет интересно учащимся, обучающимся музыке, возможно, они смогут выполнять роль экспертов по данной теме. В любом случае, надо внимательно разобрать все обозначения.

Подведем итоги

1. Смысловое чтение – один из важнейших метапредметных результатов обучения, вклад в его формирование должен вноситься и при изучении учебного предмета «Математика». Таким образом, формирование смыслового чтения – задача, стоящая и перед учителем математики.

2. Математические тексты имеют свою специфику, обусловленную как особенностями самой научной области, так и учебного предмета. Такие специфические особенности, как абстрактность понятий, логическая строгость построения выводов и доказательств, обоснованность решений, использование математического языка и символики, графиков и чертежей, структурированность изложения и представления информации, требуют особого педагогического внимания со стороны учителя, использования приемов и методик формирования математической читательской грамотности.

3. Основным носителем учебных математических текстов для ученика является учебник математики, поэтому формирование у учащихся умений и навыков работы с учебником необходимо закладывать, начиная с 5-го класса. При этом важно, чтобы система заданий на работу с текстом включала задания трех групп:

1) на общее понимание текста и ориентацию в тексте, а также формулирование прямых выводов и заключений;

2) на интерпретацию представленной в тексте информации, формулирование на ее основе сложных выводов и обобщений;

3) на использование информации из текста для решения задач, в тексте не описанных.

Системная работа по формированию умений и навыков работы учащихся с учебником строится по четырем основным направлениям:

1) знакомство с учебником и регулярное использование системы навигации учебника;

2) работа с теоретическим материалом;

3) работа с задачным материалом;

4) работа с дополнительными материалами.

2.2. Формирование функциональной математической грамотности пятиклассников при изучении темы «Натуральные числа»

2.2.1. Планируемые результаты обучения теме «Натуральные числа»

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования выдвигает требования, как было отмечено выше, в направлении личностного развития учащихся, к метапредметным, в том числе к универсальным, учебным действиям (далее – УУД) и предметным результатам обучения школьного курса математики. Одной из особенностей результатов обучения математике, соответствующей ФГОС ООО и примерным рабочим программам основного общего образования по математике базового и углубленного уровней, является их ориентация на формирование функциональной математической грамотности при изучении школьного курса математики, а значит, и числовой содержательной линии.

Числовая содержательная линия является одной из основных линий курса математики основной школы, а понятие «натуральное число» – одним из центральных математических понятий, обеспечивающих преемственность и перспективность математического образования учащихся. Это понятие является «ядром» множества чисел, что акцентирует важность изучения темы «Натуральные числа. Действия с натуральными числами».

Тематическим планированием рабочей программы по математике на изучение этой темы отводится 43 часа. Основное содержание темы обеспечивает достижение предметных образовательных результатов освоения темы (см. таблицу 7).

Организация изучения обучающимися этой темы должна быть направлена не только на приобретение ими предметных знаний, но и обеспечивать формирование метапредметных результатов, способствовать достижению цели формирования функциональной математической грамотности, которая является одной из приоритетных целей обучения математике в 5–6-х классах.

Таблица 7

Тематическое планирование по теме

«Натуральные числа. Действия с натуральными числами»

Основное содержание темы	
Натуральные числа. Действия с натуральными числами, 43 ч	Десятичная система счисления. Ряд натуральных чисел. Натуральный ряд. Число 0. Натуральные числа на координатной прямой. Сравнение, округление натуральных чисел. Арифметические действия с натуральными числами. Свойства нуля при сложении и умножении, свойства единицы при умножении. Переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения. Делители и кратные числа, разложение числа на множители. Деление с остатком. Простые и составные числа. Признаки делимости на 2, 5, 10, 3, 9. Степень с натуральным показателем. Числовые выражения; порядок действий. Решение текстовых задач на все арифметические действия, на движение и покупки

Понятие «функциональная грамотность», возникшее более полувека назад, включало базовые умения счета, которые можно отнести к функциональной математической грамотности того уровня развития общества, при решении человеком простейших задач, связанных с его бытом. Сегодня под функциональной математической грамотностью понимается способность обучающихся на уровне основного общего образования и выпускников использовать приобретенные предметные теоретические знания, сформированные умения и навыки для решения различных учебных задач и проблем реальных жизненных ситуаций, в том числе и нестандартных, т. е. задач различных сфер деятельности. В связи с этим появляются следующие вопросы.

– Что из представленного содержания темы «Натуральные числа. Действия с натуральными числами» актуально для формирования функциональной грамотности?

– Формирование каких компонентов функциональной математической грамотности может организовать учитель при изучении этой темы?

Наиболее актуальным является восприятие понятия «натуральное число» и его использование при решении различных задач, например, использование натуральных чисел для нумерации, обозначения количества предметов или объектов; сравнения и округления натуральных чисел, прикидки результата при оценивании количества, длины, массы, времени или стоимости; решения задач на движение и покупки.

Таким образом, при изучении темы «Натуральные числа» необходимо организовать деятельность пятиклассников, направленную на формирование таких компонентов функциональной математической грамотности, как:

– умение распознавать проявления понятия «натуральное число» в реальных жизненных ситуациях;

– готовность решать различные учебно-познавательные задачи, задания и проблемы, связанные с реальными жизненными ситуациями, оперируя понятием «натуральное число»;

– умения применять арифметические действия с натуральными числами, переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения для решения практико-ориентированных задач;

– умения создавать простейшие математические модели, применяя освоенный при изучении темы «Натуральные числа» математический аппарат для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты.

В процессе изучения темы выделим три основных этапа:

1) приобретение предметных знаний, соответствующих теме;

2) применение предметных знаний при выполнении заданий;

3) контроль результатов обучения теме.

Ориентируясь на выделенные этапы, выявим основные виды деятельности учащихся (см. таблицу 8).

В рамках первого основного этапа происходит целеполагание изучения темы, приобретение предметных знаний и умений и формирование познавательных универсальных учебных действий (ПУД). Так как тема «Натуральные числа» – первая в курсе математики основной школы, то учитель при изучении этой темы начинает формирование у обучающихся готовности к самостоятельному планированию и осуществлению учебной деятельности, умения построения индивидуальной образовательной траектории. На первом уроке в 5-м классе учитель организует целеполагание в направлении уровня изучения математики, учитывающее личностные желания и потребности. Учащиеся под руководством учителя оценивают, опираясь на свой опыт, уровень приобретенных в начальной школе знаний и сформированных умений их применения. Затем учитель, создавая проблемные ситуации, организует активное целеполагание изучения темы. Он руководит деятельностью учащихся при разрешении проблемы и постановке цели. Под руководством учителя пятиклассники анализируют уровни изучения темы, сопоставляют их со своими целями изучения математики и ставят индивидуальные цели изучения темы через уровни ее изучения. На этом этапе организуется приобретение (открытие) учащимися теоретических знаний по теме и формирование в первую очередь познавательных универсальных учебных действий с использованием средств, соответствующих теме.

На втором основном этапе теоретические знания включаются в систему знаний учащихся, продолжается формирование ПУД, происходит формирование и применение регулятивных и коммуникативных универсальных учебных действий (РУД, КУД). На этом этапе учитель организует деятельность учащихся, направленную на формирование функциональной математической грамотности.

Для организации деятельности на этом этапе учитель использует систему заданий, в которую входят не только математические задачи, но и учебно-познавательные, и задания, связанные с реальными жизненными ситуациями. Также на этом этапе учитель с помощью специально сконструированных или подобранных заданий может организовать формирование функциональной математической грамотности в единстве с формированием предметных, метапредметных или личностных результатов обучения по теме.

Отметим, что в целом процесс формирования функциональной математической грамотности способствует развитию ценностного отношения к математическим знаниям, в частности темы «Натуральные числа», так как в этом процессе перед учащимися раскрывается значимость темы для практической жизни. Этот процесс – своего рода ответ на вопрос учащихся: «А зачем нам нужна математика?» Тема, связанная с изучением натуральных чисел, содержит материал, который изучался в начальной школе, а в 5-м классе он повторяется, поэтому решение задач, связанных с функциональной грамотностью, разнообразит деятельность учащихся и тем самым способствует повышению мотивации к изучению математики.

На третьем основном этапе учитель организует не только контроль и коррекцию предметных знаний, но и мониторинг процесса формирования универсальных учебных действий и функциональной математической грамотности.

При изучении темы временны́е границы выделенных этапов динамичны. Это обусловлено содержанием темы и большим количеством часов, отводимых на ее изучение. Таким образом, этапы интегрируют между собой в зависимости от вида выполняемой учащимися деятельности, которую организует учитель.

Конкретизируем основные виды деятельности учащихся по уровням через учебные действия при решении различных задач (см. таблицу 8). Это будет своеобразной ориентацией для учителя в использовании личностного и дифференцированного подходов к организации обучения теме и обеспечением пропедевтики предметного изучения на базовом и углубленном уровнях с 7-го класса.

Первый уровень характеризуется выполнением репродуктивной деятельности при решении достаточно простых однотипных задач базового (1-го) уровня сложности. На втором уровне учащиеся выполняют продуктивную деятельность, решают задачи повышенного (2-го) уровня сложности. Характеристической особенностью третьего уровня является эвристическая деятельность, выполнение которой направлено на решение задач высокого (3-го) уровня сложности или задач, в которых описывается ранее неизвестная ситуация. На всех уровнях можно использовать задачи в направлении формирования функциональной математической грамотности.

Таблица 8

Основные виды деятельности обучающихся при изучении темы «Натуральные числа»

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
Целеполагание изучения темы	Под руководством учителя обучающиеся анализируют уровни изучения темы «Натуральные числа», сопоставляют их со своими целями изучения математики и ставят индивидуальную цель изучения темы через уровень ее изучения		
Приобретение и формирование ПЗ по теме и ПУД	Читать УИ, сравнивать ее с информацией готовых информационных схем и таблиц. Записывать натуральные числа, обсуждать предложенные способы их упорядочивания. Сравнивать выполненные преобразования выражений	Анализировать УИ по теме, выявлять связи между понятиями по теме, характеризовать связи понятий и составлять информационные схемы. Анализировать числа и способы их упорядочивания. Исследовать свойства чисел 0 и 1 при сложении	Анализировать и сравнивать УИ из разных источников, обобщать УИ и составлять интеллектуальные карты. Анализировать числа и предлагать способы их упорядочивания. Исследовать числовой ряд и выявлять свойства натурального ряда. Выявлять взаимосвязь между

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	и выявлять возможность выполнения аналогичных действий	и умножении. Доказывать некоторые свойства арифметических действий	свойствами арифметических действий
Применение ПЗ по теме и ПУД	***Знает:*** – определение понятия «натуральные числа», свойства чисел 0 и 1 при сложении и умножении; – формулировки свойств арифметических действий. ***Умеет***: – распознавать натуральные числа; читать и записывать их; изображать	***Знает:*** – свойства натурального ряда, свойства чисел 0 и 1 при сложении и умножении; – свойства арифметических действий; – правила округления натуральных чисел. ***Умеет***: – выполнять арифметические действия со скобками; – использовать	***Знает:*** – правила преобразования числовых выражений на основе свойств арифметических действий. ***Умеет***: – исследовать числовые закономерности, выдвигать и обосновывать гипотезы, формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	координатную прямую и отмечать на ней числа; – выполнять арифметические действия без скобок; – использовать переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения. ***Решение задач:*** – решать задачи базового уровня сложности арифметическим способом: сравнивать задачу, предложенную для решения,	при вычислениях распределительное свойство умножения; – формулировать и применять правила преобразования числовых выражений на основе свойств арифметических действий. ***Решение задач:*** – решать задачи повышенного уровня сложности арифметическим способом, используя зависимости между величинами (скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость и др.):	исследования; – доказывать свойства арифметических действий; – прикидывать результат действий. ***Решение задач:*** – решать задачи высокого уровня сложности: анализировать и осмысливать текст задачи, содержащий необходимую информацию для решения в неявном виде; выявлять известные данные и данные, необходимые для выполнения требования, осуществлять поиск

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	с однотипными и выявлять их аналогичность; сравнивать решения однотипных задач и выявлять возможность переноса способа решения на исходную задачу; переводить текстовое развернутое условие в краткое; решать исходную задачу по образцу (эталону), перенося способ решения, или с использованием предписаний	анализировать и осмысливать текст задачи, содержащий всю необходимую информацию для решения в явном виде; извлекать необходимую информацию для решения задачи, переформулировать условие и моделировать его в виде схемы, таблицы; устанавливать зависимости между величинами, моделировать ход решения в виде схемы	недостающих данных; осуществлять поиск пути решения задачи, конструировать схемы путей решения; оценивать пути решения, выбирать наиболее результативный путь решения, обосновывая его; моделировать ход решения в виде схемы, предписания; приводить различные записи решений задач

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
Формирование и применение ФМГ	Выявлять возможность использования теоретических знаний для решения задач базового уровня, описывающих реальные ситуации в знакомом контексте. Извлекать информацию из одного источника или нескольких, но небольшого объема. Выполнять простейшие действия по шаблону или по предписаниям, содержащим прямые	Выявлять, выбирать и объединять информацию из нескольких источников. Выполнять действия при работе с моделями сложных ситуаций в знакомом контексте без предписания или частично составленному, аргументируя свои действия, или в незнакомом контексте по готовому алгоритму. Сравнивать стратегии решения задачи и выбирать одну, аргументируя выбор, опираясь на личностные знания и опыт, учитывая свои	Работать с большим объемом информации из нескольких источников, представленной в разных формах. Конструировать модели сложных ситуаций в незнакомом контексте и комплексных задач. Анализировать, сравнивать и оценивать стратегии решения, отбирать наиболее результативную стратегию для конкретной ситуации. На основе уровня личностных знаний и опыта предлагать свою стратегию решения

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	инструкции. Выполнять прямое умозаключение, базируясь на алгоритмах и формулах	предположения и интерпретации	задачи, алгоритм для решения задачи
Формирование и применение РУД	*Под руководством учителя* или с помощью одноклассников: – выбирать задачи базового уровня сложности и решать их с помощью готовых образцов и алгоритмов; – осуществлять проверку выполненной деятельности и ее результата с использованием готовых	*Самостоятельно при консультационном сотрудничестве с учителем:* – выбирать задачи повышенного уровня сложности; – выполнять самопроверку деятельности и ее результата частично с использованием приемов, алгоритмов или неполных предписаний и	*Самостоятельно:* – выбирать задачи высокого уровня сложности и решать их; – оценивать деятельность и ее результат по объективным критериям или собственным, сравнивая их с объективными критериями; – формулировать выводы о результатах деятельности и,

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	эталонов и полностью составленных алгоритмов	алгоритмов или по заданным критериям; – планировать и выполнять коррекцию УПД	при необходимости, выполнять коррекцию УПД; – обобщать деятельность и составлять алгоритм
Формирование и применение КУД	Работать в группе при выполнении общей задачи. Решать личностные задачи базового уровня сложности в рамках общего задания	Рецензировать ответы товарищей, осуществлять поиск информации для решения задачи. Осуществлять взаимо-контроль, взаимопроверку	Оказывать помощь учащимся, работающим на предыдущих уровнях. Руководить деятельностью группы, корректируя ее при необходимости
Выявление уровня сформированности ПЗ, УУД, ФМГ	Знать основные понятия по теме и уметь оперировать ими под руководством учителя или с помощью предписаний.	Оперировать понятиями в рамках темы. Уметь решать задачи повышенного уровня сложности, составлять обратные задачи,	Свободно оперировать понятиями. Решать задачи высокого уровня сложности: осуществлять поиск пути решения и выбор наиболее

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	Извлекать информацию из одного источника или нескольких, но небольшого объема. Уметь решать задачи базового уровня сложности, включенные в систему, используя готовый образец или предписание	интегрировать различные виды представления задачи и ее решения, обобщать и оценивать выполненную деятельность и ее результат. Уметь выдвинуть несколько аргументов в процессе выполнения деятельности	результативного; составлять предписание, алгоритм для решения проблем и задач. Представлять результаты анализа выполненной деятельности и ее результатов. Уметь аргументировать свои действия

Список сокращений:

УИ – учебная информация
УПД – учебно-познавательная деятельность
ПЗ – предметные знания
УУД – универсальные учебные действия

ПУД – познавательные универсальные учебные действия
РУД – регулятивные универсальные учебные действия
КУД – коммуникативные универсальные учебные действия
ФМГ – функциональная математическая грамотность

2.2.2. Система задач для формирования функциональной математической грамотности

Процесс формирования функциональной математической грамотности у обучающихся должен быть построен на деятельностном подходе, который является методологической основой ФГОС ООО. В основе этого процесса лежит личная деятельность каждого школьника, специально организованная учителем с помощью заданий, способствующих формированию функциональной математической грамотности. Эти задания могут использоваться в единстве с формированием предметных, метапредметных и личностных результатов обучения теме, например в направлении патриотического, эстетического или экологического воспитания. Поэтому при обучении теме «Натуральные числа» учитель ориентируется на использование системы задач, в которую входят математические, учебно-познавательные и контекстные задачи (рис. 10).Уточним каждое понятие.

Математическая задача – в практике обучения математике при традиционном подходе к этому понятию понимается текст из условия и требования, которые являются математическими объектами. Условие содержит известные числовые величины и математические отношения (принадлежность, равенство, подобие и др.), требование – найти неизвестные величины или доказать неизвестные математические отношения.

Учебно-познавательная задача – задача, содержащая в себе затруднения и представляющая часть содержания математики (учебной информации, учебного материала), который учащемуся необходимо исследовать и преобразовать. Структура учебно-познавательной задачи аналогична математической задаче: условие и требование, но результатом ее решения являются приобретенные (открытые) новые знания или действия.

СИСТЕМА ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

- **Математические задачи**
- **Учебно-познавательные задачи**
- **Контекстные задачи**

Характеристические свойства системы задач, ориентированной на формирование функциональной математической грамотности

Деятельность учащихся при решении задач способствует формированию и развитию функциональной математической грамотности через:

- формирование умения распознавать проявления математического понятия в реальных или вымышленных жизненных ситуациях, в задачах других предметных областей;
- формирование компетенций использования метапредметных результатов обучения, в частности УУД, и предметных знаний, сформированных при изучении темы школьного курса математики, в обучении другим школьным предметам;
- формирование готовности решать различные учебно-познавательные задачи, проблемы, связанные с реальными или вымышленными жизненными ситуациями, оперируя математическим понятием;
- формирование умения создания математических моделей реальных жизненных ситуаций, применяя освоенный математический аппарат при изучении темы школьного курса математики;
- формирование умения применять освоенный математический аппарат при работе с математической моделью реальной жизненной ситуации, интерпретировать и оценивать полученные результаты.

Особенности заданий для формирования и оценки ФМГ

- Задачи, поставленные вне предметной области и решаемые с помощью предметных заданий.
- В задании описывается вымышленная или реальная жизненная ситуация, как правило, близкая и понятная учащимся.
- Контекст заданий близок к проблемным ситуациям, возникающим в повседневной жизни.
- Ситуация требует осознанного выбора модели поведения.
- Вопросы изложены простым, ясным языком.
- Требуется перевод с обыденного языка на математический язык.
- Используются разные форматы представления информации: рисунки, таблицы, диаграммы, комиксы и др.

Рис. 10

Контекстная задача – задача, связанная с реальными жизненными ситуациями, в которых могут оказаться школьники и которые соотносятся с их социокультурным опытом. В условии задачи описаны реальные или вымышленные события, а требование содержит проблему, которую необходимо решить, используя математический аппарат, соответствующий уровню математической подготовленности обучающегося.

При решении контекстной задачи учащимся необходимо не просто применить математические знания для ответа на вопрос, а осуществить выбор способа действия в описываемом событии или найти путь решения поставленной жизненной проблемы.

При изучении каждой конкретной темы школьного курса математики, в частности «Натуральные числа. Действия с натуральными числами», происходит конкретизация характеристических свойств системы задач, учитывающая содержание темы. Например, задачи должны способствовать формированию умений: распознавать присутствие понятия «натуральные числа» в описываемых жизненных ситуациях; применять арифметические действия с натуральными числами, свойства сложения и умножения для решения практико-ориентированных задач; построения математической модели реальной ситуации и работы с ней при решении текстовых задач на движение и покупки.

Таким образом, система задач, ориентированная на формирование ФМГ при изучении темы «Натуральные числа», включает:

1) математические задачи, способствующие формированию и развитию ФМГ в единстве с предметными навыками по теме;

2) математические задачи с эстетическим, экологическим и другим содержанием, способствующие формированию ФМГ в единстве с предметными и личностными результатами обучения;

3) учебно-познавательные задачи, способствующие формированию ФМГ в единстве с формированием УУД;

4) задачи по другим школьным предметам, ориентированные на использование теории математики и применение математики;

5) специально сконструированные задачи, ориентированные на формирование ФМГ.

2.2.3. Методические рекомендации по организации процесса формирования функциональной грамотности при обучении теме «Натуральные числа»

Арифметика – первая математическая дисциплина, с которой встречаются школьники еще в начальной школе. Этот раздел математики изучает числа, их свойства и отношения. В нем рассматриваются измерения, вычислительные операции и приемы выполнения вычислений. Поэтому первоочередной задачей учителя является формирование основ арифметики – теории и практики выполнения арифметических действий с натуральными числами. Целесообразно на этом этапе организовать деятельность учащихся с помощью учебно-познавательных задач, направленных на определение сформированности знания и понимания понятия «натуральное число» и действий сравнения и анализа, выявления взаимосвязи между понятиями. Приведем примеры учебно-познавательных задач.

Учебно-познавательная задача «Натуральное число».

Проанализируйте понятия и выберите из п. 2 понятие, которого не хватает в п. 1.

Конкретизируйте понятие, объединяющее понятия п. 1 с выбранным понятием из п. 2.

1. Арифметические действия, предметы, приёмы выполнения вычислений.

2. Квадрат, число, треугольник, окружность.

Задача направлена на выявление уровня понимания понятия «натуральное число».

Действия учащихся. Под руководством учителя учащиеся анализируют представленные понятия и выявляют, что только понятие «число» связано с понятиями из п. 1, так как с числами можно выполнять арифметические действия с помощью приемов выполнения действий, также числа используют для счета предметов.

Учащиеся оценивают свои знания о числах, приобретенные в начальной школе, и конкретизируют понятие «натуральное число».

Учебно-познавательная задача «Математический кроссворд» (см. Приложение 1, пример 1).

Задача направлена на выявление уровня сформированности знаний взаимосвязи понятий и умений выполнения арифметических действий, порядка выполнения действий. Учитель может организовать процесс решения задачи устно с комментарием или предложить учащимся в качестве небольшой самостоятельной работы с последующим обсуждением.

При организации дифференцированной деятельности учащихся учитель не только использует различные готовые схемы, таблицы, предписания, но и организует учебно-познавательную деятельность учащихся по их составлению.

С другой стороны, необходимо не просто продолжить изучение натуральных чисел, а именно расширить и углубить знания учащихся о натуральных числах, чтобы на этом этапе ученик не потерял интерес к учебе, заложенный в начальной школе. С помощью специально подобранных задач учитель формирует умение распознавать проявление понятия «натуральное число» в реальных жизненных ситуациях, например предлагает ситуации, взятые из научного контекста.

На этом этапе учитель может организовать развитие интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностного отношения к достижениям российских математиков и российской математической школы.

Так, задача «Натуральные числа» знакомит учащихся с фактом, который доказал П. Л. Чебышев.

Задача «Натуральные числа».

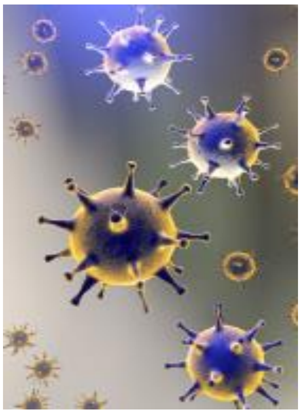
Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышёв доказал, что между любым натуральным числом n (кроме 1) и удвоенным – $2n$ всегда находится, по меньшей мере, одно простое число. Например, между 2 и 4 находится простое число 3. Проверьте это свойство для всех натуральных чисел от 3 до 20.

Арифметика имеет большое теоретическое и практическое значение, так как числовая содержательная линия связана со всеми линиями курса математики, а также с широким кругом предметов и явлений реальной жизни. Пифагорейцы, например, пришли к выводу, что все закономерности мира можно описать с помощью чисел, а арифметика нужна для того, чтобы выразить отношения и построить модель мира. Поэтому учитель должен приблизить преподавание темы «Натуральное число» к разрешению жизненно важных вопросов, формировать умения и навыки, которые должны быть связаны непосредственно с применением в практической деятельности. Именно в процессе выполнения таких заданий формируются умения решения задач реальных жизненных ситуаций, оперируя понятием «натуральное число». Приведем примеры задач.

Задача «Медведь коала».

Маленький коала съедает листья с одного эвкалиптового дерева за 10 часов, а каждый из его родителей ест вдвое быстрее. За сколько времени это семейство объест все листья с одного эвкалиптового дерева?

Запиши решение по действиям с пояснениями и ответ.



Задача «Микроб».

В банку попал 1 микроб, и через 20 минут банка была наполнена микробами, причём известно, что количество микробов ежеминутно удваивалось.

За сколько минут банка была наполнена микробами наполовину?

Запиши ответ и свои рассуждения.

Задача «Метрополитен».

Московский метрополитен открыт с шести утра до часу ночи. В настоящее время самая медленная скорость движения эскалатора – 75 см/с.

Сколько километров в день пробегает каждая ступенька эскалатора?

В жизни проблемы очень разнообразны и по содержанию, и по действиям, которые надо выполнить в процессе их решения. Поэтому важно организовать процесс обучения теме так, чтобы на уроке ученик знакомился с нестандартными задачами, которые будут его мотивировать на дальнейшее изучение математики в 5-м классе, в том числе и на углубленном уровне.

Приведем примеры задач для организации деятельности учащихся в направлении формирования умения создавать простейшие математические модели, применяя освоенный при изучении темы «Натуральные числа» математический аппарат, для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты.

Задача «Путешествие мухи».

Миша и Паша вышли одновременно из городов *A* и *B*, в которых они проживали, и двигались навстречу друг другу без остановок один со скоростью 4 км/ч, а другой – 5 км/ч.

В начальный момент движения друзей из города *А* вылетает муха и принимается летать между Мишей и Машей со скоростью 12 км/ч вперёд и назад, пока ребята не встретились.

Какое расстояние пролетела муха, если расстояние между городами 27 км?

Задача «Музыкальный ребус».

Ежегодно в школе проходит математический праздник. В этом году ребятам предложили отгадать музыкальный ребус.

Решите ребус, заменив ноты цифрами так, чтобы все указанные арифметические действия по горизонтали и вертикали выполнялись, а полученные результаты были верными.

Пятиклассник после изучения темы должен выйти с такой базой знаний и умений выполнения арифметических действий, сравнения натуральных чисел, оценивания и прикидки результатов действий, чтобы он мог решать задачи на применение натуральных чисел в других областях науки: информатике, географии, биологии. Для этого целесообразно включить в процесс изучения темы «Натуральные числа» задачи на формирование умения создавать простейшие математические модели, применяя освоенный математический аппарат для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты.

Например, задача «Кислород и вредные выбросы» связана с глобальной проблемой загрязнения окружающей среды. Условие содержит числовые данные, которые позволяют выполнить расчеты. Требование представлено не традиционным вопросом, отражающим, что нужно найти, и подсказывающим, какие действия ученику нужно выполнить, а ставит учащегося в роль помощника путешественника.

Задача «Кислород и вредные выбросы».

Автолюбитель решил перед путешествием на расстояние 1680 км к морю сравнить потребление кислорода и выбросы диоксида углерода за эту поездку, и решить, каким транспортом он поедет в путешествие.

Бак легкового автомобиля вмещает около 56 л бензина, или почти 42 кг по массе. Для его использования потребуется по массе почти в 4 раза больше кислорода. При эксплуатации автомобиля расход топлива составляет 10 л на 100 км. При потреблении 14 л бензина выброс диоксида углерода составляет 9 кг.

Помогите путешественнику выполнить расчёты и принять решение.

Таким образом, при обучении теме «Натуральные числа» для формирования ФМГ учитель использует задачи, направленные на использование результатов обучения теме в новых ситуациях, приближенных к реальным. При выявлении уровня сформированности ФМГ у пятиклассников в единстве с оцениванием метапредметных и предметных результатов обучения учитель должен использовать задания, в том числе описывающие ситуацию, в которой учащиеся могут оказаться в реальной жизни.

Для организации процесса формирования и выявления уровня сформированности ФМГ при изучении темы «Натуральные числа» учитель может использовать кейс-технологию. Темы для конструирования кейсов могут быть самые разнообразные, например, мосты или метро.

На основе вымышленных ситуаций или реальных событий, в частности, связанных с жизнью учащихся, учитель конструирует систему заданий. При выполнении заданий учащимся необходимо, с одной стороны, разделить ситуацию или событие на составляющие части, а с другой – получить целостное представление об описанной проблеме.

Задания выполняются с применением математических знаний и новых умений и качеств функциональной математической грамотности. Также для подготовки кейса учитель может отобрать и использовать задания, соответствующие теме «Натуральные числа», разработанные сотрудниками «Института стратегии развития образования Российской академии образования», представленные в банке заданий по математической грамотности на сайте института.

2.2.4. Организация устной работы при формировании функциональной математической грамотности

В основе процесса формирования функциональной математической грамотности лежит личная деятельность каждого школьника, специально организованная учителем. Задачи и задания, направленные на формирование ФМГ, могут включаться в организацию деятельности учащихся в различных формах на всех этапах урока. Они могут быть сконструированными или подобранными из различных источников, например банка заданий для формирования и оценки функциональной грамотности обучающихся основной школы (5–9-е классы) или сборников эталонных заданий.

Приведем пример организации устной работы в рамках темы «Натуральные числа» с использованием практико-ориентированных задач.

Для устной работы выбираем задачи, которые нетрудоемки, для их решения не требуется многошаговых действий и вычислений. Поэтому такие задачи могут быть использованы не только для того, чтобы продемонстрировать применимость математики на практике, но и для того, чтобы настроить учащихся на работу на уроке, помочь актуализировать необходимую для работы информацию или создать проблемную ситуацию.

Для организации деятельности учащихся сконструируем задачи, соответствующие дидактической цели, учитывающей предметно-методическую и метапредметную составляющие:

– *предметно-методическая составляющая*: отработка понимания математических идей, представлений, зависимостей, а также характера их проявления в конкретных ситуациях, т. е. не отработка предметных навыков;

– *метапредметная составляющая*: формирование ФМГ через формирование у учащихся умения на основе самостоятельно проводимого анализа практической ситуации выявления математической составляющей и поиска подходящей модели для описания ситуации.

При конструировании задач используем оригинальные формулировки заданий исследования PISA, ориентированные на проверку сформированности математической грамотности, но в систему вопросов внесем изменения и дополнения с учетом дидактической цели.

Таким образом, условие содержит описание практической ситуации, которая, в отличие от текстовой задачи, не несет в себе готовую модель решения, а требование (вопросы) направлено на формирование умений оперировать понятием «натуральные числа» в реальных жизненных ситуациях.

Для организации устной работы в направлении формирования ФМГ целесообразно использовать следующие приемы:

– обсудить ситуацию с учащимися, задать вопросы, в том числе провокационного характера, заслушать различные точки зрения;

– задания и вопросы типа: «верно или неверно», «приведите пример», «приведите контрпримеры», «объясните»;

– предложить привести не одно, а несколько различных решений;

– предложить обсудить разные решения, найти среди них неверные и обсудить допущенные ошибки;

– предложить представить и оценить, в каких именно практических ситуациях могут пригодиться те или иные знания, поискать в своем опыте похожую ситуацию;

– предложить составить собственное задание по мотивам разобранной ситуации.

К ситуациям желательно возвращаться неоднократно, по мере расширения математических знаний.

Приведем несколько примеров заданий и вопросов к ним.

Задание «Соус».

Вы делаете свою собственную заправку для салата. Вот состав продуктов на 100 мл заправки:

Ингредиенты	*Количество, мл*
Салатное масло	60
Уксус	30
Соевый соус	10

Вопросы по теме «Натуральные числа»:

– Сколько миллилитров салатного масла, сколько уксуса и сколько соевого соуса понадобится, чтобы сделать 200 мл этой заправки? 50 мл? 150 мл?

– У мамы осталось 30 мл соевого соуса. Какое наибольшее количество заправки она может приготовить?

– Как отмерить требуемое в рецепте количество продуктов столовой ложкой, если в одной столовой ложке примерно 15 мл жидкости? Все ли составляющие можно отмерить?

Вопросы для дальнейшего использования:

– В каком отношении надо брать продукты, входящие в состав соуса?

– Каково процентное соотношение продуктов, входящих в состав соуса?

Задание «Какая машина?»

Кристина только что получила водительские права и хочет купить себе первую машину. В приведённой ниже таблице указаны сведения о четырёх машинах, которые она нашла у местного продавца машин.

Модель и характеристики	*Альфа*	*Бета*	*Гамма*	*Дельта*
Год выпуска	2003	2000	2001	1999
Объявленная цена, *зеды*	4800	4450	4250	3990
Пройденное расстояние, *км*	105000	115000	128000	109000
Объём двигателя, *л*	1,79	1,796	1,82	1,783

Вопросы по теме «Натуральные числа»:

– Какая из машин выпущена раньше других?

– У какой из машин наибольший пробег?

– Кристина хочет машину, которая отвечает всем следующим условиям:

А) пройденное расстояние не больше, чем 120 000 километров;

Б) выпущена в 2000 году или позже;

В) объявленная цена не выше, чем 4500 зедов.

Какая машина отвечает условиям Кристины?

– Верны ли утверждения для машин, представленных в таблице? Если утверждение неверно, приведите контрпример.

А) Чем старше машина, тем ниже объявленная цена.

Б) Чем больше пробег, тем ниже объявленная цена.

– Составьте свой вопрос по таблице.

Вопросы для дальнейшего использования:

– У какой из машин наименьший объём двигателя?

– Верно ли утверждение: чем больше объём двигателя, тем больше пробег?

– Кристине придётся заплатить дополнительно 2,5% от объявленной цены машины в качестве налога. Сколько зедов составляет дополнительный налог на машину Альфа? Используйте калькулятор.
– Кристина покупает машину в конце 2006 года. Для каждой машины прикиньте устно средний пробег за год (считайте, что машина выпущена и куплена в начале года).

Задание «Велосипеды».

Юрий, Мария и Пётр ездят на велосипедах разных размеров. В таблице указаны расстояния, которые проезжают их велосипеды при разном числе полных оборотов колес.

Имя	*Пройденное расстояние (см)*					
	1 оборот	*2 оборота*	*3 оборота*	*4 оборота*	*5 оборотов*	*6 оборотов*
Пётр	96	192	288	384	***	***
Мария	160	320	***	***	***	***
Юрий	190	***	***	***	***	***

Вопросы по теме «Натуральные числа»:

– Назовите числа в незаполненных клетках таблицы.
– Пётр прокатил вперёд свой велосипед так, что при этом колёса сделали два полных оборота. Если Мария сделает то же самое со своим велосипедом, то насколько дальше продвинется вперёд её велосипед, чем у Петра?
– Сколько полных оборотов должны сделать колёса велосипеда Марии, чтобы проехать 1280 см? Велосипеда Петра, чтобы проехать 960 м?
– Задайте свой вопрос: «Сколько полных оборотов должны сделать колёса велосипеда ..., чтобы проехать … см?»
– Верно или неверно утверждение: «Чтобы проехать одно и то же расстояние, колёса велосипеда Петра должны будут сделать

примерно в 2 раза меньше полных оборотов, чем колёса велосипеда Юрия?»

Вопросы для дальнейшего использования:

– Верно или неверно?

А) Длина окружности покрышки колеса велосипеда Петра равна 96 см.

Б) Диаметр колеса велосипеда Марии меньше диаметра колеса велосипеда Петра.

– Задайте свой вопрос: «Сколько примерно полных оборотов...?»

2.2.5. Формирование функциональной математической грамотности в единстве с личностными результатами обучения

Для организации деятельности учащихся в направлении формирования ФМГ учитель может использовать задания из других предметных областей. Например, задания с эстетическим, экологическим и другим содержанием позволяют организовать деятельность, способствующую формированию ФМГ в единстве с личностными результатами обучения и применением предметных знаний при их решении. Такие задания раскрывают перед учащимися прикладное значение математики.

Дидактическая цель заданий:

– *предметно-методическая составляющая*: развитие понимания математических идей, представлений, зависимостей, характера их проявления в конкретных ситуациях и применение предметных умений;

– *метапредметная составляющая*: формирование ФМГ через формирование у учащихся умения на основе самостоятельно проводимого анализа практической ситуации;

– *метапредметная составляющая*: экологическое воспитание через применение математических знаний при решении задач с экологическим содержанием, формирование умений планирования поступков в окружающей среде и оценки их возможных последствий.

Приведем примеры сконструированных задач, релевантных дидактической цели.

Основой для конструирования заданий «Лось» и «Клевер и люцерна» послужили задачи по экологии[1].

При конструировании задания «Лось» к условию задачи № 27 с частично измененными числовыми данными составлена система вопросов.

При конструировании задания «Клевер и люцерна» (задача № 8) кроме системы вопросов к условиям прорастания растений составлена жизненная ситуация, понятная учащимся.

Задание «Лось».

На территории площадью 100 км² ежегодно производили частичную рубку леса. На момент организации на этой территории заповедника было отмечено 50 лосей. Через 5 лет численность лосей увеличилась до 650 голов. Ещё через 10 лет количество лосей уменьшилось до 90 голов и стабилизировалось в последующие годы на уровне 80–120 голов.

Вопросы по теме «Натуральные числа»:

– Какими числами выражается количество поголовья лосей на момент создания заповедника?
– Изобразите данные о численности лосей на координатной прямой.
– На сколько и во сколько раз увеличилась численность лосей через 5 лет?
– Каков ежегодный прирост численности лосей?
– Каково среднее значение поголовья лосей в последующие годы?

[1] Федорова Т. А., Козлов О. В. Сборник задач по экологии и рациональному природопользованию: учебно-методическое пособие / Т. А. Федорова, О. В. Козлов. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2011. – 64 с.

Вопросы для дальнейшего использования:

– Определите плотность поголовья лосей в каждый момент времени.

Вопросы в направлении формирования умений планирования поступков в окружающей среде и оценки их возможных последствий:

– Объясните возможные причины изменения численности поголовья лосей.

Задание «Клевер и люцерна».

Пятиклассники под руководством учителя биологии решили провести исследование и проверить его результаты экспериментально на опытном участке. Для проведения исследования они отобрали несколько растений, два из которых клевер и люцерна, и собрали информацию о времени прорастания семян этих растений при определённой температуре.

Помоги ребятам выполнить теоретическую часть исследования.

Название растения	*Клевер*			*Люцерна*		
Температура прорастания, *t* °C	10	15	25	10	15	25
Время прорастания, *ч*	72	42	24	90	66	48

Вопросы по теме «Натуральные числа»:

– Определи для каждой температуры: время прорастания какого растения больше: клевера или люцерны.

– Сформулируй вывод: семена какого растения нуждаются в более высокой температуре.

– Какое влияние оказывает повышение температуры прорастания на время прорастания каждого растения?

Вопросы для дальнейшего использования:

– Исследуй зависимость времени прорастания семян каждого растения от температуры и выяви, являются ли эти величины пропорциональными.

– Изобрази на диаграмме (графике) изменения времени прорастания в зависимости от температуры.

Вопросы в направлении формирования умений планирования поступков в окружающей среде и оценки их возможных последствий:

– Можно ли повысить температуру прорастания семян этих двух растений так, чтобы время прорастания было равным?
– Можно ли повысить температуру прорастания семян этих растений так, чтобы и температура, и время их прорастания были равными?
– К чему может привести очень большое повышение температуры?
– К чему может привести повышение среднегодовой температуры на Земле хотя бы на один градус?

Приведем пример сконструированного задания «Время разложения мусора в природе», идеей для которого послужило задание «Мусор» исследования PISA. Для конструирования задания отобраны виды мусора, с которыми пятиклассники могут встретиться в реальной жизни, что приближает школьное математическое образование к жизни. При разработке использовалась информация, представленная в справочных таблицах[1].

Задание «Время разложения мусора в природе».

При выполнении задания по экологии «Вред природе, наносимый мусором и отходами» школьники собрали информацию о сроках разложения различных видов мусора, который выбрасывают люди.

Школьники разделились на группы и представили информацию в разных формах:

первая группа – в виде схемы;

вторая группа – в виде таблицы.

---

[1] Сроки разложения мусора и отходов, вред природе (таблица) // Справочные таблицы. InfoTables.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infotables.ru/produkty-pitaniya/1119-sroki-razlozheniya-musora.

Группа 1

Детские подгузники – 600 лет

Железные банки – 10 лет
Жестяные – 90 лет
Алюминиевые – 500 лет

Обувь из натурального сырья – 10 лет, синтетического– 80 лет

Рыболовная леска – 600 лет

Одежда из натуральных тканей – 3 года, из синтетических – 40 лет

Полиэтиленовые пакеты, пластиковые бутылки – 200 лет

Электрические батарейки – 200 лет

Газетная бумага – 1 месяц
Офисная бумага – 2 года
Восковая – 5 лет

Губки для мытья посуды – 200 лет

Автомобильные аккумуляторы – 100 лет

Резиновые покрышки – 140 лет

Стекло –1000 лет

Группа 2

Тип мусора	*Время разложения*
Банановая кожура	3–4 недели
Кожура апельсина	до 6 месяцев
Огрызок яблока	до 2 месяцев
Мясопродукты	от 1 месяца
Жевательная резинка	до 30 лет

Вопросы по теме «Натуральные числа»:

- Изобрази на координатной прямой время разложения мусора, которое выражается натуральными числами. Объясни, можно ли все данные изобразить на координатной прямой, если нет, то почему?
- Определи, какой вид мусора распадается наибольшее количество времени.
- Расположи виды мусора по возрастающей времени распада.
- Выяви верные утверждения:

  А) Одежда из натуральных тканей распадается в 10 раз быстрее одежды из синтетических тканей.

  Б) Обувь из синтетических сырья распадается в 8 раз быстрее обуви из натурального сырья.

  В) Стекло распадается целый век.

Вопросы для дальнейшего использования:

- Школьники планируют изобразить результаты в виде столбчатой диаграммы. Приведите одну причину, по которой столбчатая диаграмма не подходит для демонстрации данных результатов.

Вопросы в направлении формирования умений планирования поступков в окружающей среде и оценки их возможных последствий:

- Выяви наиболее вредные виды мусора и определи сроки их разложения.
- Предложи варианты переработки наиболее вредных видов мусора.

Вопросы для формирования умений работать с информацией

- Сравни варианты представления информации и обоснуй, какой из этих вариантов наиболее информативный.

Целесообразно после выполнения аналогичных заданий обсудить с учащимися идеи в направлении экологии, появившиеся у них, как им поможет математика в решении экологических проблем.

Подведем итоги

1. Планируемые результаты обучения математике в 5-м классе, в частности теме «Натуральные числа», включают не только результаты в направлении личностного развития учащихся, метапредметные и предметные результаты обучения, но также и результаты формирования функциональной математической грамотности, которая является одной из приоритетных целей обучения математике в 5–6-х классах.

2. Методологической основой формирования функциональной математической грамотности в обучении математике является системно-деятельностный, личностно-ориентированный и компетентностный подходы, что обеспечивает возможность организации процесса формирования функциональной математической грамотности в единстве с личностными результатами обучения и развитием предметных и метапредметных результатов обучения, включающих универсальные учебные действия.

3. Процесс формирования функциональной математической грамотности способствует формированию ценностного отношения к математическому образованию, так как в этом процессе акцентируется значимость математических знаний и умений для реальной жизни.

4. Качество обучения математике в направлении достижения функциональной математической грамотности в основном определяется качеством заданий, которые использует учитель для организации активной учебно-познавательной деятельности учащихся.

5. Процесс формирования и развития функциональной математической грамотности ориентирован на использование системы задач и заданий, включающей математические, учебно-познавательные и контекстные задачи, соответствующие дидактической цели.

2.3. Особенности изучения темы «Обыкновенные дроби» в 5-м классе

2.3.1. Изучение дробей в 5–6-х классах

Одна из основных линий содержания курса математики 5–6-х классов – арифметическая, включающая в себя крупный блок «Обыкновенные дроби». Главная особенность заключается в том, что изучение этого блока делится на два этапа (см. таблицу 9).

Таблица 9

Распределение содержания темы по годам обучения

5-й класс: этап 1	*6-й класс: этап 2*
Представление о дроби как способе записи части величины. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанная дробь; представление смешанной дроби в виде неправильной дроби и выделение целой части числа из неправильной дроби. Изображение дробей точками на числовой прямой. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Приведение дроби к новому знаменателю. Сравнение дробей. Сложение и вычитание дробей. Умножение и деление дробей; взаимно обратные дроби. Нахождение части целого и целого по его части	Обыкновенная дробь, основное свойство дроби, сокращение дробей. Сравнение и упорядочивание дробей. Решение задач на нахождение части от целого и целого по его части. Дробное число как результат деления. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и возможность представления обыкновенной дроби в виде десятичной

На первом этапе происходит знакомство с основными идеями и понятиями, способами выполнения арифметических действий с обыкновенными дробями. При этом на данном этапе рассматриваются простейшие случаи арифметических действий с обыкновенными дробями без использования правил нахождения наименьшего общего знаменателя с помощью наименьшего общего кратного. Изучение понятий наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя отнесены программой к курсу математики 6-го класса.

На втором этапе происходит совершенствование навыков сравнения и преобразования дробей, идет освоение новых правил выполнения арифметических действий с дробями, формирование навыков выполнения действий с выражениями, содержащими обыкновенные дроби, расширение приемов решения задач на дроби.

Основным требованием к построению содержания, связанного с изучением дробей, является структурирование и развитие идей, реализованных ранее. Переход к изучению десятичных дробей целесообразен после комплексного и законченного во всех основных моментах изучения обыкновенных дробей, в этом случае обоснование правил действий с десятичными дробями строится на понимании правил действий с обыкновенными дробями.

Учитывая эти положения, давайте обратим наше внимание на особенности в изучении темы «Обыкновенные дроби».

2.3.2. Введение понятия дроби

Формирование представления о дроби начинается с введения понятия «доли». Это понятие не является для учащихся новым, оно вводится в курсе математики начальной школы, учащиеся уже имеют некоторый опыт применения долей в жизненных ситуациях. Несмотря на это, на уроках нужно включать практические задания на нахождение доли целого и целого по его доли, использовать при этом разнообразные предметы, допускающие деление на части.

Способом получения дробных чисел является также процесс измерения длины, так как он является историческим и в нем закладываются основы для восприятия расширения понятия числа в курсе алгебры. Чтобы учащиеся могли эффективно использовать этот способ в дальнейшем, полезно провести практическую работу «Измерение длины предмета». Этапы этой работы состоят в следующем:

1) Учащимся дается задание измерить длину некоторого предмета с заданной единицей измерения – метр. В качестве предмета можно выбрать, например, стол, книжную полку и т. п.

2) В ходе измерений у учащихся получается остаток, в котором принятая единица измерения не укладывается полностью.

3) Для измерения остатка данную единицу измерения делят на несколько равных долей и одну из них принимают за новую единицу измерения.

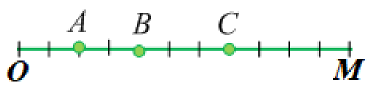
4) Если необходимо, повторяют этот процесс, откладывая новую единицу измерения на остатке.

В качестве результата проведенных измерений учащиеся получают дробное число.

Целесообразно использование отрезка, разделенного на равные части, в качестве простейшей модели дроби. От этой модели позже можно будет перейти к изображению дробей точками координатной прямой.

Задание.

Какую часть отрезка *OM* составляет отрезок *OA*? Отрезок *OB*? Отрезок *OC*?



Ученик определяет, что за единицу принят отрезок *ОМ*, который поделен на 11 частей, значит, знаменателем дроби будет число 11. Находит, что отрезок *ОА* составляет две части – два одиннадцатых отрезка *ОМ*, отрезок *ОВ* – четыре части, т. е. четыре одиннадцатых, отрезок *ОС* – семь частей, т. е. семь одиннадцатых, и записывает получившиеся дроби, фиксируя числитель каждой дроби: $\frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \frac{7}{11}$. Таким образом, он работает со словом – названием дроби, с моделью – образом дроби, с изображением – записью дроби.

Полезно изменить число частей, на которые поделен отрезок, и предложить выполнить задание еще раз, обращая внимание на то, что изменилось, а что осталось неизменным.

а) б)

Рис. 11

Можно предложить учащимся самостоятельно отметить точку, назвать и записать соответствующую дробь.

Далее важно предложить учащимся проделать «обратный путь»: начертить отрезок, который соответствовал бы названной учителем дроби, и записать эту дробь.

Не следует забывать и о величинах. При этом полезно образовывать дроби не только от величин длины, но и от величин массы (одна вторая, одна десятая, три четверти, две пятых килограмма), времени (одна вторая, одна десятая, три четверти, две пятых часа), стоимости (одна десятая, пять сотых рубля).

Таким образом, постепенно от деления предметов на равные части и долей в начальной школе через деление отрезков и величин учащиеся постепенно подходят к пониманию дроби как числа. Важно помнить, что многим учащимся требуется время, чтобы осознать появление нового для них вида чисел и привыкнуть к новой – «двухэтажной» – записи.

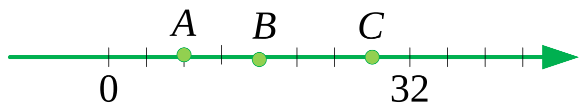
2.3.3. Изображение дробей точками на координатной прямой

Одним из важных моментов на пути освоения пятиклассниками понятия «дроби» является изображение дробей точками на координатной прямой (луче). К моменту начала изучения данной темы учащиеся уже умеют изображать натуральные числа точками на координатной прямой, поэтому это не должно вызывать у них особых затруднений.

Для успешного овладения приемом изображения дроби точкой на координатной прямой полезно выполнить с учащимися задания на нахождение координат точек с натуральными значениями в случаях, когда единичный отрезок на координатной прямой не указан. Например:

Задание.

Найдите координаты точек *A*, *B*, *C* на рисунке.



Решение. Отрезок от числа 0 до числа 32 разделен на 8 равных частей, значит, один такой отрезок составляет одну восьмую часть всего отрезка, значит, одному делению соответствует число $32 : 8 = 4$, двум – число 8 (точка *A*), трем – 12, четырем – 16 (точка *B*), пяти – 20, шести – 24, семи – 28 (точка *C*). Следовательно, точки имеют координаты: $A(8)$, $B(16)$, $C(28)$.

Способ изображения дроби точкой на координатной прямой следует рассматривать на примере конкретной дроби. Его обоснование формирует понятие дроби: знаменатель показывает, на сколько равных частей нужно разделить единичный отрезок, а числитель – сколько таких частей надо взять. Необходимо на разных примерах показать, что выбор единичного отрезка зависит от знаменателей данных дробей, например разобрать следующее задание:

Задание.

Отметьте на координатной прямой точки: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$.

В этом случае единичный отрезок удобнее принять равным 8 клеткам или 8 см, число 8 – наибольшее общее кратное знаменателей.

2.3.4. Классификация дробей

Классификация дробей, изучаемых в курсе математики 5-го класса, представлена следующими типами: правильная и неправильная дроби, смешанная дробь, что позволяет обобщить и систематизировать полученные знания о дробях. Но их изучение может осуществляться не в одной теме по причине того, что смысл записи смешанной дроби объясняется как сумма целой части и дробной части. Следовательно, это понятие можно ввести после изучения правила сложения дробей. В начале темы и так очень много новых для учащихся понятий.

Рассмотрим это на примере следующей задачи:

Задание.

8 яблок надо разделить поровну между тремя братьями. Сколько яблок достанется каждому брату?

Решение. Разделить яблоки между тремя братьями можно, например, так: разрезать каждое яблоко на три равные части и от каждого яблока дать братьям по одной такой части. Тогда каждый получит $\frac{8}{3}$ яблока.

Можно поступить иначе: дать каждому брату по 2 целых яблока и еще по $\frac{1}{3}$ от каждого из оставшихся яблок. Тогда каждому достанется $2+\frac{2}{3}$ яблока.

Для такого «комбинированного» числа, которое складывается из натурального числа и правильной дроби, есть специальное обозначение: $2\frac{2}{3}$. Числа 2 и $\frac{2}{3}$ просто записывают рядом без знака «плюс». Такую запись называют смешанной дробью. При этом натуральное число 2 называют целой частью смешанной дроби, а правильную дробь $\frac{2}{3}$ – ее дробной частью.

С введением понятия неправильной дроби у учащихся меняется уже, возможно, сложившийся стереотип, что дробь меньше целого. В этой же связи полезно обсудить с пятиклассниками, где по отношению к 1 на координатной прямой располагаются правильные дроби, а где – неправильные дроби.

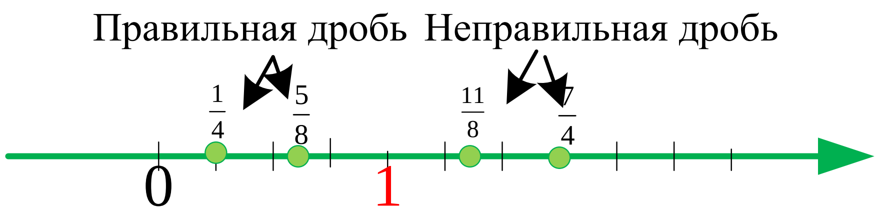


Рис. 12

Все эти понятия для пятиклассников являются новыми, поэтому при организации образовательного процесса нужно использовать большое количество дидактического материала.

2.3.5. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Приведение дроби к новому знаменателю

Изучение основного свойства дроби предполагает организацию работы с геометрическими моделями и/или реальными объектами. После проведения такой работы учащиеся должны самостоятельно сделать вывод о том, что одно и то же число можно выразить разными дробями с соответственно разными числителями и знаменателями. Важно, чтобы у учащихся сформировалось понимание того, что с помощью основного свойства дроби дробь можно заменить на равную ей дробь со знаменателем, кратным ее знаменателю. Упражнения должны содержать две взаимно обратные операции, следующие из основного свойства дроби: приведение дроби к новому знаменателю и сокращение дроби. Полученные при этом умения будут развиваться при изучении алгебраических дробей.

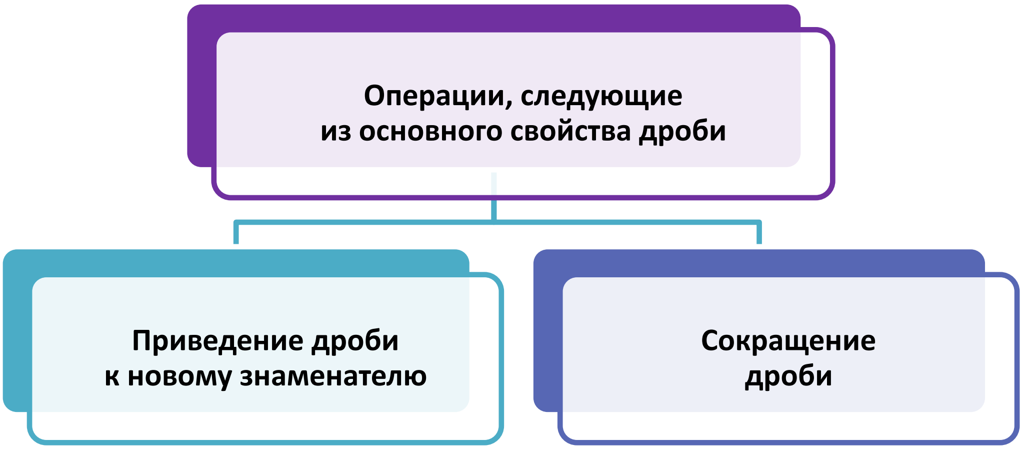


Рис. 13

Математический аппарат, сформированный у учащихся к настоящему моменту, позволяет применять два способа сокращения дроби:

1) последовательное деление числителя и знаменателя дроби на их общие делители:

$$\frac{36:2}{66:2}=\frac{18:3}{33:3}=\frac{6}{11},$$

2) разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение дроби на общие делители:

$$\frac{\mathbf{36:2}}{\mathbf{66:2}}=\frac{\cancel{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{2}\cdot\cancel{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{3}}{\cancel{\mathbf{2}}\cdot\cancel{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{11}}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}.$$

Примы нахождения общего знаменателя двух дробей лучше рассмотреть на конкретных примерах и разобрать три случая:

1) знаменатель одной дроби является делителем знаменателя другой дроби;
2) знаменатели двух дробей взаимно простые числа;
3) знаменатели двух дробей не являются делителями друг друга и не являются взаимно простыми.

Нужно учитывать, что дидактический материал должен содержать задания, в которых значения знаменателя не являются большими, то есть не требуют громоздких вычислений. Например:

1) Знаменатель одной дроби является делителем знаменателя другой дроби.	Приведите дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{14}$ к общему знаменателю.
2) Знаменатели двух дробей взаимно простые числа.	Приведите дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$ к общему знаменателю.
3) Знаменатели двух дробей не являются делителями друг друга и не являются взаимно простыми.	Приведите дроби $\frac{3}{6}$ и $\frac{5}{12}$ к общему знаменателю.

Более «громоздкие» случаи могут быть рассмотрены в курсе математики 6-го класса.

В результате изучения первых двух случаев учащиеся должны прийти к выводам о том, что дроби можно привести к любому общему знаменателю и в качестве общего знаменателя всегда можно взять произведение знаменателей данных дробей.

Третий случай показывает, что, чтобы вычисления были проще, надо постараться подобрать наименьший общий знаменатель. Используя третий случай, приходим к алгоритму нахождения наименьшего общего знаменателя:

1) проверяем, делится ли больший знаменатель на меньший;

2) если делится, то он и является общим знаменателем;

3) если не делится, то будем последовательно перебирать числа, кратные большему знаменателю, и проверять, делятся ли они на меньший знаменатель.

Главное, что должны понимать пятиклассники, – это что есть общий способ, а есть частные приемы, которые также полезно знать, так как их использование помогает нам в отдельных случаях.

2.3.6. Сравнение дробей

При изучении сравнения дробей также полезно рассмотреть различные случаи, идя от частных случаев к общему способу:

1) Сравнение дробей с равными знаменателями.
2) Сравнение дробей с равными числителями.
3) Сравнение дробей с разными знаменателями и числителями.

Рис. 14

Приемы сравнения дробей с равными знаменателями и с равными числителями можно проиллюстрировать учащимся на практических примерах. А сравнение дробей с разными знаменателями предусматривает проведение теоретических обоснований, использующих дополнительно применение алгоритмов сокращения дробей и приведения дробей к общему числителю или к общему знаменателю.

В результате изучения всех случаев сравнения дробей необходимо снова акцентировать внимание учащихся на том, что есть общий, универсальный способ – приведение к общему знаменателю, а есть рациональные приемы для частных случаев. В последнем случае важен анализ типа сравниваемых дробей, чтобы выбрать верный прием для сравнения дробей в конкретном случае.

Задание.

Сравните $\frac{4}{11}$ и $\frac{4}{9}$.

Универсальный способ

$\frac{4}{11} = \frac{36}{99}$; $\frac{4}{9} = \frac{44}{99}$;

$\frac{36}{99} < \frac{44}{99}$; $\frac{4}{11} < \frac{4}{9}$.

Рациональный прием

Из двух дробей с одинаковыми числителями меньше та, у которой знаменатель больше:

11 > 9, следовательно,

$$\frac{4}{11} < \frac{4}{9}.$$

В последнем случае важен анализ типа сравниваемых дробей, чтобы выбрать верный прием для сравнения дробей в конкретном случае.

Приведем пример, при выполнении которого полезно использовать различные приемы сравнения.

Задание.

Расположите числа $\frac{4}{9}, \frac{9}{4}, \frac{1}{12}, \frac{5}{8}, \frac{1}{9}$ в порядке возрастания.

Первое, что надо подметить, что среди данных чисел есть числа с равными числителями – 1/12 и 1/9 и равными знаменателями – 1/9 и 4/9. После выделения и сравнения дробей с равными числителями, равными знаменателями и распознавания неправильной дроби 9/4 остается лишь «найти место» в этом ряду дроби 5/8. Но и здесь помогут эти же способы:

$$5/8 > 4/8 > 4/9.$$

Итак, пошагово алгоритм выглядит следующим образом:

1. Сравнить дроби с равными числителями $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{9}$.

2. Сравнить дроби с равными знаменателями $\frac{4}{9}$ и $\frac{1}{9}$.

3. Распознать неправильную дробь $\frac{9}{4}$.

4. Определить место дроби $\frac{5}{8}$: $\frac{4}{9}<\frac{4}{8}<\frac{5}{8}$

или сравнить с $\frac{1}{2}$, если заметить, что $\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$, а $\frac{5}{8}>\frac{1}{2}$.

Упражнения по данной теме позволяют учителю акцентировать внимание учащихся на математических задачах, имеющих множество решений. Например:

Задание.

Найдите какое-либо число, расположенное между числами: $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$.

Для успешного решения таких задач от учащихся требуется сообразительность, воображение, умение рассуждать, делать простейшие умозаключения. Поэтому они полезны для всех учащихся, но чрезвычайно важны для успешных учащихся, имеющих повышенный уровень математической подготовки.

Если числа расположены «близко друг к другу», придется рассматривать их через «увеличительное стекло»: увеличим знаменатель и приведем обе дроби к общему знаменателю 72, получим дроби $\frac{8}{72}$ и $\frac{9}{72}$.

И снова увеличим знаменатель, умножив и числитель, и знаменатель на 2, получим $\frac{16}{144}$ и $\frac{18}{144}$; вот и появился «промежуток», в котором можно «рассмотреть» дробь $\frac{17}{144}$.

Способ 1

$\frac{1}{9}=\frac{8}{72}$;

$\frac{1}{8}=\frac{9}{72}$.

$\frac{1}{9}=\frac{8\cdot 2}{72\cdot 2}=\frac{16}{144}$;

$\frac{1}{8}=\frac{9\cdot 2}{72\cdot 2}=\frac{18}{144}$.

$\frac{16}{144}<\frac{17}{144}<\frac{18}{144}$.

Но есть и другой путь, он короче.

У данных дробей общий числитель – 1; можно привести их к новому общему числителю – 2. Число $\frac{2}{17}$ расположено между ними.

Способ 2

$\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$;

$\frac{1}{9}=\frac{2}{18}$.

$\frac{2}{18}<\frac{2}{17}<\frac{2}{16}$

2.3.7. Действия с дробями

Сложение и вычитание дробей

Изучение сложения и вычитания обыкновенных дробей целесообразно осуществлять по схеме, аналогичной той, по которой шло изучение сравнения дробей. Здесь можно выделить и рассмотреть такие же случаи:

1) Сложение и вычитание дробей с равными знаменателями.
2) Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.
3) Основные свойства или законы сложения и вычитания.
4) Сложение и вычитание смешанных дробей.

Мотивацией изучения действий над обыкновенными дробями могут служить простые задачи с сюжетными фабулами. Например:

Задание.

На тренировке по теннису $\frac{2}{15}$ ч Дима и Максим разминались, а оставшиеся $\frac{8}{15}$ ч времени тренировки выполняли отработку техники ударов.

Сколько времени длилась тренировка Димы и Максима? Выразите ответ сначала в часах, а затем в минутах.

Теоретический материал этой темы учащиеся воспринимают достаточно легко, но при этом рекомендуется использовать наглядные материалы: рисунки, модели, набор «Доли и дроби», чертежи, схемы.

При работе с упражнениями по теме «Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями» также следует распределять их на группы:

- наибольший знаменатель одной из дробей является наименьшим общим знаменателем двух дробей;
- знаменатели дробей являются взаимно простыми числами;
- результатом сложения или вычитания является сократимая дробь.

Самым сложным этапом изучения является этап «Сложение и вычитание смешанных дробей», так как он содержит большее количество групп заданий.

При сложении:

- слагаемые – натуральное число и правильная дробь;
- слагаемые – натуральное число и смешанная дробь;
- слагаемые – смешанная дробь и правильная дробь;
- результат сложения – неправильная дробь;
- оба слагаемых – смешанные дроби.

При вычитании:

- вычитание натурального числа из смешанной дроби;
- вычитание правильной дроби из натурального числа;
- вычитание смешанной дроби из натурального числа;
- вычитание правильной дроби из смешанной дроби;
- вычитание двух смешанных дробей.

Поэтому данные группы заданий необходимо распределить по урокам так, чтобы изучение было постепенным, шло расширение охватываемых случаев, дозированно нарастала сложность заданий.

Умножение и деление дробей

Существует множество подходов к объяснению умножения дробей. Каждый из них имеет свои достоинства. У учителя всегда есть возможность продемонстрировать учащимся несколько способов, реализовать внутренние межпредметные связи арифметики и геометрии.

По аналогии со сложением и вычитанием дробей выделяются группы заданий на умножение и деление дробей.

Особенностью при выполнении умножения и деления дробей, отличающей их от действий сложения и вычитания, является возможность сокращение дробей в процессе промежуточных вычислений, а не только после получения результата. Это момент, на который полезно обратить внимание пятиклассников.

Как и для других арифметических действий, большое значение для умножения дробей имеет прикидка и оценка результата вычислений. В данном случае необходимо проиллюстрировать учащимся на конкретных примерах, что:

• при умножении натурального числа на правильную дробь произведение меньше данного натурального числа, например:

$$12 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}, \qquad 4\frac{1}{2} < 12;$$

• при умножении натурального числа на неправильную дробь произведение больше данного натурального числа, например:

$$12 \cdot \frac{8}{3} = 32, \qquad 32 > 12.$$

2.3.8. Нахождение части целого и целого по его части

Одна из важнейших целей изучаемой темы – овладение учащимися способами решения задач на нахождение части целого и целого по его части. При решении таких задач применяются два способа решения: с помощью понятия дроби (развернутые действия) и с помощью умножения или деления на дробь (свернутые действия).

Задание.

На ремонт участка дороги длиной 5 км отведено 3 дня. В первый день было отремонтировано $\frac{2}{5}$ длины этого участка. Сколько километров дороги отремонтировали в первый день?

Решение:

Способ 1: $5 : 5 \cdot 2 = 2$ (км). Ответ: 2 км.

Способ 2: $5 \cdot \frac{2}{5} = 2$ (км). Ответ: 2 км.

Задание.

В первый день было отремонтировано $\frac{3}{5}$ длины дороги, что составило 6 км. Какова общая длина дороги?

Решение:

Способ 1: $6 : 3 \cdot 5 = 10$ (км). Ответ: 10 км.

Способ 2: $6 : \frac{3}{5} = 10$ (км). Ответ: 10 км.

Выбор способа – за учеником, поскольку это зависит от его индивидуального уровня сформированности понятия дроби и действий с дробями, ученик должен «дозреть» до понимания смысла данного действия, формальное запоминание правила без понимания не даст продолжительного положительного результата. Возможно, это произойдет уже в 5-м классе, но при изучении десятичных дробей, или в 6-м классе, в любом случае в 5-м классе это не является планируемым результатом.

И здесь же снова полезно вернуться к наглядным моделям, объясняющим действия. Надо добиваться от пятиклассника понимания совершаемых действий, их осмысленности, а не бездумного заучивания алгоритмов.

Тема «Дроби» важна не только сама по себе, но и как основа для продолжения знакомства с дробями – изучения десятичных дробей. Если создана прочная ориентировочная база выполнения различных действий с обыкновенными дробями, то и изучение десятичных дробей не вызовет у учащихся серьезных проблем.

Подведем итоги

1. Формирование понятия дроби в курсе 5-го класса включает следующие важные этапы и составляющие:

- введение понятия дроби;
- изображение дробей точками на координатной прямой;
- знакомство с видами обыкновенных дробей;
- освоение основного свойства дроби, применение свойства для сокращения дробей и приведения дроби к новому знаменателю;
- сравнение дробей;
- действия с дробями;
- нахождение части целого и целого по его части.

Каждый из этих этапов базируется на предыдущих, на каждом этапе необходимо добиваться от учащихся осознанности выполняемых ими действий. Таким образом ученик будет постепенно переходить от оперирования отдельными понятиями, связанными с обыкновенной дробью, к все более осознанному и свободному оперированию понятием дроби.

2. На каждом этапе формирования понятия дроби целесообразно обращаться к моделям, одной из которых является координатная прямая.

3. При изучении различных способов сравнения и выполнения арифметических действий необходимо акцентировать внимание учащихся на том, что есть общий, универсальный способ, а есть рациональные приемы для частных случаев.

4. Полезно всякий раз, где это возможно и с учетом индивидуальных возможностей учащихся и класса, обосновывать, доказывать используемые свойства, приучая учащихся к мысли, что в математике ничего не принимается на веру, а все, что используется, обязательно должно быть доказано. Это особенно важно для развития учащихся, способных достичь повышенных уровней математической подготовки.

2.4. Тема «Десятичные дроби»: акценты при формировании понятия и умений оперировать с ним в 5-м классе

2.4.1. Планируемые результаты обучения теме «Десятичные дроби»

В соответствии с Примерной рабочей программой по математике основного общего образования базового уровня (ПРП ООО), разработанной с целью выполнения требований ФГОС ООО, в 5-м классе увеличивается количество понятий, связанных с числовой линией. Наряду с такими понятиями, как «натуральное число» и «обыкновенная дробь» вводится понятие «десятичная дробь». Тематическим планированием ПРП ООО по математике на изучение темы «Десятичные дроби» отводится 38 часов. Планируемые результаты освоения темы, представленные в программе, включают метапредметные результаты, в т. ч. УУД, предметные, которые отражены в основном содержании темы (см. таблицу 10) и достижение цели формирования функциональной математической грамотности на уровне темы.

Таблица 10

Тематическое планирование по теме «Десятичные дроби»

Основное содержание темы	
Десятичные дроби, 38 часов	Десятичная запись дробей. Сравнение десятичных дробей. Действия с десятичными дробями. Округление десятичных дробей. Решение текстовых задач, содержащих дроби. Основные задачи на дроби

Тема «Десятичные дроби» включена в курс математики 5-го класса после тем «Натуральные числа» и «Обыкновенные дроби».

Рис. 15

У учащихся уже сформированы соответствующие понятия и умения выполнения арифметических действий с натуральными числами, обыкновенными и смешанными дробями, имеются знания свойств арифметических действий. Поэтому при изучении темы «Десятичные дроби», с одной стороны, осуществляется формирование понятия «десятичная дробь» и начинается формирование умений выполнения действий с десятичными дробями, а с другой – обобщение знаний и умений выполнения действий с натуральными числами и обыкновенными дробями на действия.

Числовая линия – одна из основных содержательных составляющих школьного курса математики и связана со всеми другими содержательными линиями. Поэтому результаты изучения темы «Десятичные дроби» являются одной из основ фундамента для успешного изучения всех тем.

Взаимосвязь числовой содержательной линии

с содержательными линиями школьного курса математики

Рис. 16.

Кроме того, высокий уровень сформированности умения оперировать понятием «десятичная дробь» в 5-м классе является своеобразным мостиком к углубленному изучению математики, в том числе в 7–9-х классах, а также одной из ступенек лестницы успеха в реальной жизни.

Важно отметить, что в 5-м классе изучение десятичных дробей только начинается, это первичное знакомство, оно будет продолжено в 6-м классе.

Поэтому в предметных результатах на конец 5-го класса нет требований, связанных с действиями с десятичными числами, с процентами. Учащиеся должны получить представление об арифметических действиях с десятичными дробями, которые, однако, не являются здесь итоговым результатом, выполнение действий на контроль не выносится, при этом простейшие ситуации могут войти в промежуточный контроль.

Таким образом, при изучении темы «Десятичные дроби» необходимо организовать деятельность пятиклассников, направленную на формирование:

– понятия «десятичная дробь» и восприятие этого понятия как формы записи чисел;

– умения распознавать проявления понятия «десятичная дробь» в реальных жизненных ситуациях;

– умения сравнивать, округлять десятичные дроби;

– умения выполнять арифметические действия с десятичными дробями;

– умения изображать десятичные дроби точками на координатной прямой;

– готовности решать различные математические, учебно-познавательные и контекстные задачи, оперируя понятием «десятичная дробь»;

– умения создавать простейшие математические модели, применяя освоенный математический аппарат при изучении темы «Десятичные дроби» для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты;

– понимания значимости темы «Десятичные дроби» для дальнейшего успешного изучения школьного курса математики.

Аналогично процессу изучения темы «Натуральные числа» выделим три основных этапа изучения десятичных дробей:

1) приобретение предметных знаний соответствующих теме;

2) применение предметных знаний при выполнении заданий;

3) контроль результатов обучения теме.

Ориентируясь на выделенные этапы, выявим основные виды деятельности учащихся (см. таблицу 11).

Таблица 11

Основные виды деятельности обучающихся при изучении темы «Десятичные дроби»

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
Целеполагание изучения темы	Под руководством учителя анализирует уровни изучения темы «Десятичные дроби», сопоставляет их с личностными целями изучения математики и ставит индивидуальную цель изучения темы через уровень ее изучения		
Приобретение и формирование ПЗУ по теме и ПУД	Читать УИ о десятичных дробях, сравнивать ее с информацией готовых информационных схем и таблиц. Сравнивать представленные наборы десятичных дробей, обсуждать предложенные варианты их упорядочивания. Сравнивать выполненные	Анализировать УИ о десятичных дробях; выявлять понятия, связанные с десятичными дробями. Составлять информационные схемы. Выявлять сходства и различия правил выполнения действий с десятичными дробями, натуральными числами, обыкновенными и	Анализировать и сравнивать УИ о десятичных дробях из разных источников, обобщать УИ и составлять интеллектуальные карты. Выявлять взаимосвязь между свойствами арифметических действий. Выявлять свойства десятичных дробей, опираясь на числовые эксперименты.

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	арифметические действия с десятичными дробями и выявлять возможность выполнения аналогичных действий	смешанными дробями. Анализировать числа, записанные в разных формах, и выявлять способы их упорядочивания	Анализировать способы упорядочивания чисел, записанных в разной форме
Применение ПЗУ по теме и ПУД	***Знает:*** – понятие «десятичная дробь»; – правила выполнения арифметических действий с десятичными дробями; – правило округления десятичных дробей. ***Умеет:*** – распознавать, читать и записывать десятичные	***Знает:*** – понятия, связанные с понятием «десятичная дробь; – правила выполнения действий с десятичными дробями; – свойства арифметических действий. ***Умеет:*** – переходить от записи числа	***Знает***: – способы упорядочивания десятичных дробей; – правила преобразования числовых выражений, содержащих числа, записанные в разных формах. ***Умеет:*** – исследовать арифметические действия с числами, записанными в разных формах;

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	дроби, записывать десятичную дробь в виде обыкновенной дроби; – выполнять арифметические действия с десятичными дробями в столбик в простейших случаях, округлять десятичные дроби; – изображать десятичные дроби точками на координатной прямой с заданным удобным единичным отрезком.	в форме десятичной дроби к форме обыкновенной и смешанной дроби; – выполнять арифметические действия со скобками; применять свойства арифметических действий для рационализации вычислений; выполнять прикидку результата вычислений; – выбирать единичный отрезок для изображения десятичных дробей на координатной прямой;	– формулировать обобщения и выводы по результатам исследования, эксперимента в направлении подтверждения или опровержения самостоятельно выдвинутой гипотезы; – выполнять оценку значений выражений, содержащих числа, записанные в разных формах; – доказывать свойства арифметических действий с использованием понятия «десятичная дробь».

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	Решение задач: – решать простейшие задачи на нахождение части целого и целого по его части с использованием образцов (эталонов) решений аналогичных задач, предписаний и образцов выполнения арифметических действий с десятичными дробями, перенося способ решения задачи; – выполнять по образцу корректировку решения	– распознавать истинные и ложные высказывания о дробях. ***Решение задач:*** – решать текстовые задачи на нахождение части от целого и целого по его части базового уровня, содержащие известные числовые данные, записанные в разных формах; – оценивать возможные пути решения задачи и обосновывать выбранный путь (способ) решения	***Решение задач:*** – решать текстовые задачи повышенного уровня сложности, моделируя ход решения задачи с помощью рисунка, схемы, таблицы; – решать учебные исследовательские задачи на выявление сходства и различия каких-либо объектов, в том числе текстовых задач и их решений

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
Формирование и применение ФМГ	Выявлять возможность использования действий с дробями для решения простейших задач, описывающих реальные ситуации в знакомом контексте. Извлекать информацию о числовых данных, содержащейся в явном виде в одном описании ситуации небольшого объема. Выполнять действия по шаблону или по предписаниям,	Использовать действия с числами для решения задач базового уровня сложности, описывающих реальные ситуации в знакомом или незнакомом контексте. Отбирать информацию о данных из разных источников и представленных разными способами. Работать с моделями сложных ситуаций в знакомом контексте с неполным алгоритмом, аргументируя свои действия, или в незнакомом контексте	Работать с большим объемом информации из нескольких источников, представленной в разных формах. Конструировать модели реальных сложных ситуаций в незнакомом контексте и комплексных задач. Анализировать, сравнивать и оценивать стратегии решения, отбирать наиболее результативную стратегию для конкретной ситуации. На основе уровня личностных знаний и опыта предлагать свою стратегию решения

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	содержащим прямые инструкции. Выполнять прямое умозаключение, базируясь на алгоритмах, формулах	по готовому предписанию и предложенной стратегии	задачи, алгоритм для решения задачи
Формирование и применение РУД: самоорганизация и самоконтроль	*Под руководством учителя* или с помощью одноклассников: – выбирать задачи базового уровня сложности и решать их с помощью готовых образцов и алгоритмов; – осуществлять проверку выполненной деятельности и ее результата с использованием готовых	*Самостоятельно при консультационном сотрудничестве с учителем:* – выбирать задачи базового уровня сложности; – выполнять самопроверку деятельности и ее результата частично с использованием приемов, алгоритмов или неполных предписаний и	*Самостоятельно:* – выбирать задачи повышенного уровня сложности и решать их; – оценивать деятельность и ее результат по объективным критериям или собственным, сравнивая их с объективными критериями; – формулировать выводы о результатах деятельности и,

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	эталонов и полностью составленных алгоритмов	алгоритмов или по заданным критериям; – планировать и выполнять коррекцию УПД	при необходимости, выполнять коррекцию УПД; – обобщать деятельность и составлять алгоритм
Формирование и применение КУД: общение и сотрудничество	Работать в группе при выполнении общей задачи; решать личностные задачи базового уровня сложности в рамках общего задания	Рецензировать ответы товарищей, осуществлять поиск информации для решения задачи; осуществлять взаимоконтроль, взаимопроверку	Оказывать помощь учащимся, работающим на предыдущих уровнях; руководить деятельностью группы, корректируя ее при необходимости
Выявление уровня сформированности ПЗУ, УУД, ФМГ	Знать основные понятия по теме и уметь оперировать ими под руководством учителя или с помощью предписаний.	Оперировать понятиями в рамках темы. Уметь решать задачи повышенного уровня сложности, составлять	Свободно оперировать понятиями. Решать задачи высокого уровня сложности: осуществлять поиск пути

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	Извлекать информацию из одного источника или нескольких, но небольшого объема. Уметь решать задачи базового уровня сложности, включенные в систему, используя готовый образец или предписание	обратные задачи, интегрировать различные виды представления задачи и ее решения, обобщать и оценивать выполненную деятельность и ее результат. Уметь выдвинуть несколько аргументов в процессе выполнения деятельности	решения и выбор наиболее результативного; составлять предписание, алгоритм для решения проблем и задач. Представлять результаты анализа выполненной деятельности и ее результатов. Уметь аргументировать свои действия

Список сокращений:

УИ – учебная информация
УПД – учебно-познавательная деятельность
ПЗУ – предметные знания и умения
УУД – универсальные учебные действия
ФМГ – функциональная математическая грамотность
ПУД – познавательные универсальные учебные действия: логические, исследовательские, работа с информацией
ПЛУД – познавательные логические учебные действия
ПИУД – познавательные исследовательские учебные действия
ПРИУД – познавательные учебные действия по работе с информацией
РУД – регулятивные универсальные учебные действия: самоорганизация и самоконтроль
КУД – коммуникативные универсальные учебные действия: общение и сотрудничество

2.4.2. Организация процесса открытия пятиклассниками понятия «десятичная дробь»

При знакомстве учащихся с понятием «десятичная дробь» необходимо сформировать у них понимание, что десятичная дробь – это не новый вид числа, а новый способ записи числа: форма записи числа, в которой значимость каждой цифры зависит от ее позиции в записи.

Организация процесса открытия пятиклассниками понятия «десятичная дробь» базируется на системно-деятельностном и компетентностном подходах. Использование системно-деятельностного подхода ориентировано на самостоятельное открытие учащимися понятия «десятичная дробь», приобретения знаний об этом понятии в процессе выполненной деятельности под руководством учителя на этом уровне обучения (5-й класс).

Компетентностный подход позволяет формировать у учащихся компетенции в направлении самостоятельного приобретения знаний, которые будут необходимы им в дальнейшем изучении математики.

Рассмотрим подробнее первый этап этого процесса.

Учитель организует групповую самостоятельную и разностороннюю познавательную деятельность учащихся, руководя деятельностью с помощью специальных вопросов и рекомендаций.

Он предлагает учащимся проанализировать шестизначное натуральное число, записанное с помощью одной цифры. Каждой группе учащихся даны числа, записанные с помощью разных цифр. Это поможет им в формулировании и обобщении выводов после проведения первого этапа.

Например, одна группа использует цифру 3.

Таблица 12

Открытие понятия «десятичная дробь» (фрагмент)

Деятельность		*Выполняемые задания или запись в тетради*
учителя	*учащихся*	
Проанализируйте шестизначное натуральное число, записанное с помощью одной цифры, например 333333, и выявите, как можно записать это число с помощью разрядных слагаемых	Каждая группа берет разные цифры, записывает свое число. Учащиеся анализируют, выявляют разрядные слагаемые, представляют число в виде их суммы	333333= =300000 +30000+3000+300+30+3 333333= =3·100000+3·10000+3·1000+ +3·100+3·10 +3

Далее учитель предлагает учащимся представить информацию о своих числах в виде таблицы. Учащиеся заполняют таблицу.

Класс тысяч			*Класс единиц*			*Разрядные слагаемые*		
сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.			
3						300000		
	3					30000		
		3				3000		
			3			300		
				3		30		
					3	3		

Затем под руководством учителя учащиеся анализируют данные о числах, представленные в таблицах, с целью выявления изменений, происходящих с разрядными слагаемыми при переходе от слагаемого более высокого разряда к последующему разряду. Формулируют результаты анализа и обобщают их на другие переходы, фиксируют рассуждения в таблице.

Результат анализа:

– если осуществить переход от слагаемого более высокого разряда к последующему разряду, то происходит уменьшение разрядного слагаемого в 10 раз, так как во всех случаях делим на 10;

– если сделать переход через разрядное слагаемое, то слагаемое уменьшается в сто раз, так как делим на сто.

Класс тысяч			*Класс единиц*			*Разрядные слагаемые*			
сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.				
3						300000	**Делим на 10**		**Делим на 100**
	3					30000		300000:10=30000	
		3				3000		30000:10=3000	
			3			300		3000:10=300	
				3		30		300:10=30	
					3	3		30:10=3	

Далее учитель задает вопрос: «А можно ли продолжить деление на десять?» Тем самым создается проблемная ситуация, так как справа от разряда единиц нет разрядов. Учащиеся выдвигают гипотезу: нужно добавить столбцы для записи следующих разрядов. Добавляют столбцы и записывают значения разрядных слагаемых по нисходящей.

Класс тысяч			*Класс единиц*						*Разрядные слагаемые*
сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.				
3									300000
	3								30000
		3							3000
			3						300
				3					30
					3				3
						3			**Делим на 10** $\frac{3}{10}$
							3		$\frac{3}{100}$
								3	$\frac{3}{1000}$

Учащиеся предлагают названия для новых разрядов в зависимости от того, какие доли получили, например, десятые, сотые, тысячные. Если названия, которые предложили учащиеся, отличаются от принятых, то учитель организует их корректировку с помощью вопросов или предлагает учащимся скорректировать самостоятельно, используя, например, материалы учебника.

Этот этап открытия понятия завершается обобщением результатов всех групп и оцениванием выполненной деятельности.

Класс тысяч			*Класс единиц*						*Разрядные слагаемые*
сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.	**десятые**	**сотые**	**тысячные**	
3									300000
	3								30000
		3							3000
			3						300
				3					30
					3				3
						3			$\frac{3}{10}$
							3		$\frac{3}{100}$
								3	$\frac{3}{1000}$

Делим на 10

Делим на 1000

При таком подходе к открытию понятия «десятичная дробь» формируется понимание, что десятичная дробь – это не новый тип числа, а новый способ записи числа: форма записи числа, в которой значимость каждой цифры зависит от ее позиции в записи.

Учащиеся заносят результат деятельности в личное портфолио, фиксируя результат деятельности в специальных тетрадях «Основные результаты учебной деятельности» при изучении математики, или конструируют карточку-памятку.

Памятка. Понятие «десятичная дробь»

Десятичная дробь – это не новый тип числа, а новый способ записи числа: форма записи числа, в которой значимость каждой цифры зависит от её позиции в записи числа.

$$\underbrace{\frac{39}{10}}_{\text{Обыкновенная дробь}} = \underbrace{3\frac{9}{10}}_{\text{Смешанная дробь}} = \underbrace{3,9}_{\text{Десятичная дробь}}$$

2.4.3. Организация процесса открытия пятиклассниками правил сложения и вычитания десятичных дробей

Опираясь на понимание факта, что десятичная дробь – это новый способ записи числа, и базируясь на сформированности умений выполнения действий с натуральными числами, обыкновенными дробями, учитель организует деятельность учащихся в направлении самостоятельного открытия учащимися правил выполнения арифметических действий с десятичными дробями. Такой подход позволит учащимся не формально запомнить правила выполнения действий, а осмыслить их и затем осознанно применять.

Правила сложения и вычитания десятичных дробей

Проиллюстрируем поэтапное открытие правил сложения и вычитания десятичных дробей.

На первом этапе учитель создает проблемную ситуацию. Он предлагает учащимся проанализировать записи выполнения сложения и вычитания двух чисел, записанные в столбик, в которых по две записи – верные, а другие составлены на основе типичных ошибок, которые допускают школьники.

Отметим, что в зависимости от уровня математической подготовки класса, отдельных учащихся учитель может ограничиться лишь случаями сложения чисел, а также подобрать более простые случаи, чем предложены ниже, например, не более двух знаков до и после запятой, не увлекаться нулями и девятками, переходами через десяток. Предложенный ниже вариант можно отнести к наиболее сложным.

В рассматриваемом примере в таблице ячейки с верными записями для наглядности выделены цветом, а в ячейках с неверными записями запись выделена красным цветом. На практике учитель предлагает учащимся записи выполнения сложения, не отражая верные и неверные.

$7,238 + 21,4 = ?$	$5,3 + 234,059 = ?$	$78,529 - 4,2 = ?$	$98,3 - 5,724 = ?$
+ 7, 2 3 8 2 1, 4 2 8, 6 3 8	**+ 5, 3 2 3 4, 0 5 9 2 3 9, 3 5 9**	**– 7 8, 5 2 9 4, 2 7 4, 3 2 9**	**– 9 8, 3 5, 7 2 4 9 2, 5 7 6**
+ 7, 2 3 8 2 1, 4 9, 3 7 8	+ 5, 3 2 3 4, 0 5 9 7, 6 4 0 5 9	– 7 8, 5 2 9 4, 2 3, 6 5 2 9	– 9 8, 3 5, 7 2 4 4, 1 1 4
+ 7, 2 3 8 2 1, 4 7, 4 5 2	+ 5, 3 2 3 4, 0 5 9 2 3 4, 1 1 2	– 7 8, 5 2 9 4, 2 7 8, 4 8 7	– 9, 8 3 5, 7 2 4 5, 2 5 9

В результате анализа учащиеся выявляют, что:

– в первом случае десятичные дроби записаны так, что целые и дробные части чисел записаны друг под другом;

+ 7, 2 3 8 2 1, 4 2 8, 6 3 8	**+ 5, 3 2 3 4, 0 5 9 2 3 9, 3 5 9**	**– 7 8, 5 2 9 4, 2 7 4, 3 2 9**	**– 9 8, 3 5, 7 2 4 9 2, 5 7 6**

– во втором случае десятичные дроби записаны так, что первые цифры в записи дробей находятся друг под другом;

+ 7, 2 3 8 2 1, 4 9, 3 7 8	+ 5, 3 2 3 4, 0 5 9 7, 6 4 0 5 9	– 7 8, 5 2 9 4, 2 3, 6 3 2 9	– 9 8, 3 5, 7 2 4 4, 1 1 4

– в третьем случае десятичные дроби записаны так, что последние цифры в записи дробей находятся друг под другом.

+ 7, 2 3 8 2 1, 4 7, 4 5 2	+ 5, 3 2 3 4, 0 5 9 2 3 4, 1 1 2	– 7 8, 5 2 9 4, 2 7 8, 4 8 7	– 9, 8 3 5, 7 2 4 5, 2 5 9

При этом во всех трех случаях результаты действия сложения (вычитания) отличаются друг от друга. Таким образом, перед учащимися появилась проблема, в рамках которой сформулированы вопросы:

– Как выполнить сложение и вычитание десятичных дробей?

– Можно ли выполнить сложение и вычитание, записав десятичные дроби при выполнении действий в столбик?

– Если можно выполнить эти действия в столбик, то как записать десятичные дроби при выполнении сложения и вычитания в столбик?

На последующих этапах учитель организует деятельность учащихся, непосредственно направленную на открытие правил выполнения действий сложения и вычитания, формирование понимания этих правил. На всех этапах учитель руководит деятельностью учащихся. При этом степень руководства зависит от уровня изучения темы, активности учащихся. Поэтому учитель предлагает учащимся, например, выполнить какие-то действия, формулируя их в общем виде, или оказывает консультационную помощь, или задает вопросы, которые подсказывают учащимся, какие действия надо выполнить.

На втором этапе учащиеся вспоминают, что они знают правила сложения и вычитания обыкновенных и смешанных дробей. Учащиеся выдвигают гипотезу, что выполнить сложение или вычитание десятичных дробей можно, записав числа в виде обыкновенных или смешанных дробей.

На этом этапе учитель руководит деятельностью учащихся, при необходимости, задавая наводящие вопросы, например:

– Какие формы записи чисел нам известны?

– Какие правила сложения чисел в другой форме мы изучили?

– Можем ли десятичные дроби представить в другой форме записи так, чтобы выполнить действия, используя уже известные правила сложения и вычитания чисел?

Или в явном виде предлагает выполнить дополнительные действия: записать десятичные дроби в форме смешанных или обыкновенных дробей, выполнить сложение и вычитание чисел, полученных при переходе к другой форме записи.

Учащиеся записывают результаты своих действий.

$$7{,}238+21{,}4=\frac{7238}{1000}+\frac{214}{10}=\frac{7238}{1000}+\frac{21400}{1000}=\frac{28638}{1000}=28{,}638$$

$$5{,}3+234{,}059=\frac{53}{10}+\frac{234059}{1000}=\frac{5300}{1000}+\frac{234059}{1000}=\frac{239359}{1000}=239{,}359$$

$$7{,}238+21{,}4=7\frac{238}{1000}+21\frac{4}{10}=7\frac{238}{1000}+21\frac{400}{1000}=28\frac{638}{1000}=28{,}638$$

$$5{,}3+234{,}059=5\frac{3}{10}+234\frac{59}{1000}=5\frac{300}{1000}+234\frac{59}{1000}=239\frac{359}{1000}=239{,}359$$

$$78{,}529-4{,}2=\frac{78529}{1000}-\frac{42}{10}=\frac{78529}{1000}-\frac{4200}{1000}=\frac{74329}{1000}=74{,}329$$

$$98{,}3-5{,}724=\frac{983}{10}-\frac{5724}{1000}=\frac{98300}{1000}-\frac{5724}{1000}=\frac{92576}{1000}=92{,}576$$

$$78{,}529-4{,}2=78\frac{529}{1000}-4\frac{2}{10}=78\frac{529}{1000}-4\frac{200}{1000}=74\frac{329}{1000}=74{,}329$$

$$98{,}3-5{,}724=98\frac{3}{10}-5\frac{724}{1000}=98\frac{300}{1000}-5\frac{724}{1000}=97\frac{1300}{1000}-5\frac{724}{1000}=92\frac{576}{1000}=92{,}576$$

Затем учитель предлагает учащимся сравнить результаты сложения (вычитания) всех вариантов и сформулировать вывод.

Учащиеся сравнивают значения выражений при переходе к записи десятичных дробей в форме обыкновенных дробей, выявляют их равенство и самостоятельно формулируют выводы о выполнении сложения и вычитания десятичных дробей. Результатом сравнения и анализа является ***вывод о выполнении сложения и вычитания десятичных дробей поразрядно***.

Приведем примеры рассуждений учащихся и формулировок выводов.

Рассуждения учащихся

$$7{,}238+21{,}4=\frac{7238}{1000}+\frac{214}{10}=\frac{7238}{1000}+\frac{21400}{1000}=\frac{28638}{1000}=28{,}638$$
$$7{,}238+21{,}4=7\frac{238}{1000}+21\frac{4}{10}=7\frac{238}{1000}+21\frac{400}{1000}=28\frac{638}{1000}=28{,}638$$

$$5{,}3+234{,}059=\frac{53}{10}+\frac{234059}{1000}=\frac{5300}{1000}+\frac{234059}{1000}=\frac{239359}{1000}=239{,}359$$
$$5{,}3+234{,}059=5\frac{3}{10}+234\frac{59}{1000}=5\frac{300}{1000}+234\frac{59}{1000}=239\frac{359}{1000}=239{,}359$$

$$78{,}529-4{,}2=\frac{78529}{1000}-\frac{42}{10}=\frac{78529}{1000}-\frac{4200}{1000}=\frac{74329}{1000}=74{,}329$$
$$78{,}529-4{,}2=78\frac{529}{1000}-4\frac{2}{10}=78\frac{529}{1000}-4\frac{200}{1000}=74\frac{329}{1000}=74{,}329$$

$$98{,}3-5{,}724=\frac{983}{10}-\frac{5724}{1000}=\frac{98300}{1000}-\frac{5724}{1000}=\frac{92576}{1000}=92{,}576$$
$$98{,}3-5{,}724=98\frac{3}{10}-5\frac{724}{1000}=98\frac{300}{1000}-5\frac{724}{1000}=97\frac{1300}{1000}-5\frac{724}{1000}=92\frac{576}{1000}$$
$$=92{,}576$$

1) Так как при сложении (вычитании) двух десятичных дробей при переходе к их записи в форме обыкновенных и смешанных дробей получились равные результаты, то можно выполнять сложение (вычитание) десятичных дробей, осуществляя переход к другой форме записи десятичных дробей.

2) Так как сложение (вычитание) десятичных дробей при переходе к записи в виде обыкновенных и смешанных дробей связано с разрядами, то сложение (вычитание) десятичных дробей можно выполнять поразрядно.

Вывод: сложение и вычитание десятичных дробей, так же как и сложение и вычитание натуральных чисел, выполняется поразрядно.

После формулирования вывода учитель обращает внимание учащихся на то, что опыт, приобретенный ими ранее при изучении тем «Натуральные числа» и «Обыкновенные дроби», в частности использование сформированных умений представления чисел в разных формах записи, выполнения действий сложения и вычитания обыкновенных и смешанных дробей, помог им найти один из путей решения проблемы. Тем самым учитель показывает пятиклассникам взаимосвязь разных тем математики и необходимость изучения учебного материала на достаточно высоком уровне.

На третьем этапе учащиеся сравнивают и анализируют результаты сложения (вычитания) десятичных дробей в виде смешанных дробей с результатами записей сложения (вычитания) в столбик, учитывая результаты предыдущего сравнения. Результатом этой деятельности является сформулированный учащимися ***вывод о правильной записи десятичных дробей при выполнении действий сложения и вычитания в столбик***.

Рассуждения учащихся

$$7{,}238 + 21{,}4 = 7\frac{238}{1000} + 21\frac{4}{10} = 7\frac{238}{1000} + 21\frac{400}{1000} = 28\frac{638}{1000} = 28{,}638$$

$$5{,}3 + 234{,}059 = 5\frac{3}{10} + 234\frac{59}{1000} = 5\frac{300}{1000} + 234\frac{59}{1000} = 239\frac{359}{1000} = 239{,}359$$

$\begin{array}{rrrrrr} + & & 7, & 2 & 3 & 8 \\ & 2 & 1, & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 8, & 6 & 3 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrrrr} + & & & 5, & 3 & 0 & 0 \\ & 2 & 3 & 4, & 0 & 5 & 9 \\ \hline & 2 & 3 & 9, & 3 & 5 & 9 \end{array}$

$$78{,}529 - 4{,}2 = 78\frac{529}{1000} - 4\frac{2}{10} = 78\frac{529}{1000} - 4\frac{200}{1000} = 74\frac{329}{1000} = 74{,}329$$

$$98{,}3 - 5{,}724 = 98\frac{3}{10} - 5\frac{724}{1000} = 98\frac{300}{1000} - 5\frac{724}{1000} = 97\frac{1300}{1000} - 5\frac{724}{1000} = 92\frac{576}{1000}$$
$$= 92{,}576$$

$\begin{array}{rrrrrr} - & 7 & 8, & 5 & 2 & 9 \\ & & 4, & 2 & 0 & 0 \\ \hline & 7 & 4, & 3 & 2 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrrr} - & 9 & 8, & 3 & 0 & 0 \\ & & 5, & 7 & 2 & 4 \\ \hline & 9 & 2, & 5 & 7 & 6 \end{array}$

3) Так как результаты сложения (вычитания) двух десятичных дробей при переходе к их записи в форме смешанных дробей совпадает с результатом сложения (вычитания) в столбик при записи целой и дробных частей друг под другом, то такой вид записи сложения (вычитания) в столбик является верным.

Вывод: при сложении и вычитании десятичных дробей десятичные дроби записывают в столбик таким образом, чтобы цифры, стоящие в одноименных разрядах, были расположены друг под другом.

На четвертом этапе учитель организует деятельность учащихся в направлении выявления учащимися наиболее рационального способа выполнения сложения и вычитания десятичных дробей. В процессе этой деятельности учащиеся анализируют, сравнивают и оценивают действия, выполненные в процессе сложения (вычитания) десятичных дробей при их записи в форме обыкновенной и смешанной дроби и в столбик. Результатом деятельности учащихся является самостоятельно сформулированный ими ***вывод о наиболее рациональном способе выполнения сложения и вычитания десятичных дробей.***

Рассуждения учащихся

$$7{,}238 + 21{,}4 = \frac{7238}{1000} + \frac{214}{10} = \frac{7238}{1000} + \frac{21400}{1000} = \frac{28638}{1000} = 28{,}638$$

$$7{,}238 + 21{,}4 = 7\frac{238}{1000} + 21\frac{4}{10} = 7\frac{238}{1000} + 21\frac{400}{1000} = 28\frac{638}{1000} = 28{,}638$$

$$5{,}3 + 234{,}059 = \frac{53}{10} + \frac{234059}{1000} = \frac{5300}{1000} + \frac{234059}{1000} = \frac{239359}{1000} = 239{,}359$$

$$5{,}3 + 234{,}059 = 5\frac{3}{10} + 234\frac{59}{1000} = 5\frac{300}{1000} + 234\frac{59}{1000} = 239\frac{359}{1000} = 239{,}359$$

$$\begin{array}{r} 7{,}238 \\ +\;21{,}400 \\ \hline 28{,}638 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}300 \\ +\;234{,}059 \\ \hline 239{,}359 \end{array}$$

$$78{,}529 - 4{,}2 = \frac{78529}{1000} - \frac{42}{10} = \frac{78529}{1000} - \frac{4200}{1000} = \frac{74329}{1000} = 74{,}329$$

$$78{,}529 - 4{,}2 = 78\frac{529}{1000} - 4\frac{2}{10} = 78\frac{529}{1000} - 4\frac{200}{1000} = 74\frac{329}{1000} = 74{,}329$$

$$98{,}3 - 5{,}724 = \frac{983}{10} - \frac{5724}{1000} = \frac{98300}{1000} - \frac{5724}{1000} = \frac{92576}{1000} = 92{,}576$$

$$98{,}3 - 5{,}724 = 98\frac{3}{10} - 5\frac{724}{1000} = 98\frac{300}{1000} - 5\frac{724}{1000} = 97\frac{1300}{1000} - 5\frac{724}{1000} = 92\frac{576}{1000}$$
$$= 92{,}576$$

$$\begin{array}{r} 78{,}529 \\ -\;4{,}200 \\ \hline 74{,}329 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98{,}300 \\ -\;5{,}724 \\ \hline 92{,}576 \end{array}$$

4) Так как выполнено меньшее количество действий в процессе сложения и вычитания десятичных дробей в столбик, то сократилась запись выполнения вычислений, и сам процесс вычисления значений упростился.

Вывод: наиболее рациональным способом выполнения сложения и вычитания десятичных дробей является выполнение этих действий в столбик.

На *последнем этапе* открытия правил сложения и вычитания десятичных дробей учителя под руководством учащиеся обобщают выполненную деятельность. Целесообразно организовать составление предписания для выполнения этих арифметических действий с десятичными дробями.

Предписание «Сложение и вычитание десятичных дробей»

1) Записать десятичные дроби в столбик, разместив одноимённые разряды друг под другом, запятую под запятой;
2) уравнять у дробей количество знаков после запятой, если это необходимо;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимание на запятую;
4) скорректировать значение суммы (разности), поставив в найденном числе запятую под запятой в данных дробях.

Затем учитель организует процесс самооценивания учащимися выполненной деятельности. В качестве домашнего задания учитель предлагает учащимся сконструировать карточки-памятки, эталоны, отражающие правильную запись при выполнении сложения и вычитания десятичных дробей в столбик, предписания и добавить их в портфолио, которое учащиеся могут использовать при возникновении затруднений при решении задач, повторении темы при подготовке к зачету или контрольной работе по теме.

Памятка. Сложение и вычитание десятичных дробей

При сложении и вычитании десятичных дробей в столбик дроби записывают таким образом, чтобы цифры, стоящие в одноимённых разрядах, были расположены друг под другом.

$$\begin{array}{r} 7{,}238 \\ +\ 21{,}400 \\ \hline 28{,}638 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98{,}300 \\ -\ 5{,}724 \\ \hline 92{,}576 \end{array}$$

2.4.4. Основные подходы к организации открытия учащимися правил умножения десятичных дробей

Открытие учащимися правил умножения десятичных дробей базируется на деятельностном подходе с использованием знаний и умений, в частности, анализа и сравнения математических объектов, поиска аналогии и переноса действий на другие объекты при открытии понятия «десятичная дробь» и умений выполнения действий сложения и вычитания десятичных дробей.

Рассмотрим основные подходы к организации открытия учащимися правил умножения десятичных дробей.

Умножение десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д.

Открытие правила умножения десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. базируется на понимании умножения натурального числа на эти числа, а именно, что число увеличивается в соответствующее количество раз, и на понимании значимости каждой цифры числа в зависимости от ее позиции в записи десятичной дроби.

На первом этапе учитель организует групповую работу и предлагает учащимся проанализировать десятичные дроби с целью выявления изменений, происходящих с разрядными слагаемыми при переходе от разрядного слагаемого более низкого разряда к предыдущему разряду.

По аналогии с процессом открытия понятия «десятичная дробь» учитель предлагает сначала провести анализ чисел, записанных с помощью одной цифры. У групп учащихся числа, записанные с помощью разных цифр, например 7.

Класс единиц						*Разрядные слагаемые*
сот.	дес.	ед.	**десятые**	**сотые**	**тысячные**	
7						700
	7					70
		7				7
			7			$\frac{7}{10}$
				7		$\frac{7}{100}$
					7	$\frac{7}{1000}$

Умножаем на 10

Умножаем на 100

Умножаем на 1000

Так как учащимся уже знакома такая деятельность, то они самостоятельно анализируют изменения, происходящие с разрядными слагаемыми при переходе от слагаемого более низкого разряда к предыдущему разряду, к слагаемому более высокого разряда.

Рассуждения учащихся:

– если осуществить переход от слагаемого более низкого разряда к предыдущему разряду, то происходит увеличение разрядного слагаемого в 10 раз, так как во всех случаях умножаем на 10;

– если сделать переход через одно разрядное слагаемое, то слагаемое увеличивается в сто раз, так как умножаем на сто;

– если сделать переход через два разрядных слагаемых, то слагаемое увеличивается в тысячу раз, так как умножаем на тысячу.

Вывод: при умножении разрядного слагаемого на 10, 100, 1000 и т. д. происходит увеличение разрядного слагаемого в соответствующее количество раз.

На втором этапе учитель предлагает учащимся проанализировать представленные в таблице числа, записанные одинаковыми цифрами, но стоящими в разных разрядах, например:

Класс единиц						Действия с разрядным слагаемым
сот.	дес.	ед.	десятые	сотые	тысячные	
		5	9	1	6	Умножаем на 10 Умножаем на 100
	5	9	1	6		
5	9	1	6			

Учащиеся читают числа, записывают их, выявляют действия с разрядными слагаемыми, фиксируют их.

Рассуждения учащихся:

– так как при переходе от числа, записанного в одной строчке, к числу, записанному в следующей строчке, наблюдается переход разрядного слагаемого от более низкого к последующему разряду, то во всех случаях умножаем на 10;

– так как при переходе от числа, записанного в первой строчке, к числу, записанному в третьей строчке (т. е. через строчку), наблюдается переход разрядного слагаемого от более низкого к более высокому разряду через разряд, то умножаем на 100.

После этого учитель организует деятельность учащихся в направлении формулирования правила умножения десятичной дроби на 10 и 100, переноса действий на умножение десятичной дроби на 1000, 10000 и т. д.

Действия учащихся. Читают и записывают числа, представленные в таблицах, в форме десятичных дробей. Выявляют на основе аналогии и обобщения действий с разрядными слагаемыми действия с десятичными дробями и заполняют пропуски в выражениях, указывая вместо кружочка арифметическое действие, вместо квадратика – число, чтобы получилось верное равенство.

Число	Действия с разрядными слагаемыми	
5,916		5,916
59,16	**Умножаем** **Умножаем**	5,916 ⊙□= 59,16
591,6	**на 10** **на 100**	5,916 ⊙□= 591,6

Затем учащиеся формулируют правило умножения десятичных дробей на 10 и 100, расширяя его на умножение на 1000 и т. д.

Рассуждения учащихся:

– так как при переходе от разрядного слагаемого более низкого разряда к последующему разряду умножаем слагаемое на 10, то для получения числа, записанного в следующей строчке, должны число, записанное в предыдущей строчке, умножить на 10: $5{,}916 \bullet 10 = 59{,}16$;

– так как при переходе от разрядного слагаемого более низкого разряда к слагаемому через разряд умножаем слагаемое на 100, то для получения числа, записанного в последней строчке, должны число, записанное в первой строчке, умножить на 100: $5{,}916 \bullet 100 = 591{,}6$;

– $5{,}916 \bullet 1000 = 5916; 5{,}916 \bullet 10000 = 59160; 5{,}916 \bullet 100000 = 591600.$

Вывод: чтобы число умножить на 10, 100, 1000 и т. д., надо запятую перенести на 1, 2, 3 и т. д. цифры вправо, а если цифр не хватает, то приписать справа нули.

После этого учитель организует проверку сформулированного правила.

Учащиеся проверяют сформулированное правило с использованием записи десятичных дробей в форме обыкновенных дробей, выполняя аналогию с процессом открытия правила сложения и вычитания десятичных дробей.

5,916 ⊙⊡= 59,16	$5{,}916 \bullet 10 = \frac{5916}{1000} \bullet 10 = \frac{5916}{100} = 59{,}16$
5,916 ⊙⊡= 591,6	$5{,}916 \bullet 100 = \frac{5916}{1000} \bullet 100 = \frac{5916}{10} = 591{,}6$

Далее учащиеся работают с учебником – сверяют свою формулировку с формулировкой, данной в учебнике, и при необходимости корректируют самостоятельно сформулированное правило.

Аналогично примеру организации открытия учащимися правила умножения десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. учитель организует деятельность учащихся в направлении открытия правила деления десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.

При оценивании и обобщении результатов деятельности учащиеся составляют памятки, отражающие правила умножения и деления десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т.д.

Памятка. Умножение десятичных дробей на 10, 100, 100 и т. д.

При умножении десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д надо запятую перенести на столько знаков вправо, сколько нулей в множителе, а если цифр не хватает, то приписать справа нули.

$5{,}916 \bullet 10 = 59{,}6; 5{,}916 \bullet 100 = 591{,}6; 5{,}916 \bullet 1000 = 5916;$

$5{,}916 \bullet 10000 = 59160; 5{,}916 \bullet 100000 = 591600.$

Умножение десятичных дробей

Процесс формирования у учащихся умений умножения десятичных дробей базируется на сформированности у них понимания действий умножения натуральных чисел и действий умножения и деления десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.

Учитель организует деятельность учащихся в направлении самостоятельного открытия правила умножения десятичных дробей, используя задачи, связанные с реальными или вымышленными объектами, математические задачи. В направлении достижения дидактической цели задачи конструируются учителем или подбираются таким образом, что условие содержит известные числовые величины – натуральные числа и десятичные дроби, а требование направлено на выполнение их умножения. Например, первая задача связана с вымышленным объектом, а вторая задача сконструирована на основе истории Большого театра в Москве, а именно: условие содержит размеры зала и сцены театра.

Задача 1. Поле подсолнухов

За дедушкиной деревней начинается поле подсолнухов, длина которого 298 м, а ширина – 31 м. Поле имеет форму прямоугольника, длина которого, кажется, протянулась до самого горизонта. Вычислите площадь подсолнухового поля.

Задача 2. Путешествуем по столице. Большой театр

В 1924–1959 годах Большой театр имел две сцены – основную и филиал. Длина основного зала с учётом оркестровой раковины – 29,8 м, ширина – 31 м, высота – 19,6 м. Глубина сцены – 22,8 м, ширина – 39,3 м, размер портала сцены – 21,5×17,2 м.

Большой театр, 1956 г.

1) Найдите площадь основного зала Большого театра.

2) Вычислите площадь сцены и портала сцены.

Учитель организует анализ задач.

Действия учащихся. Учащиеся выделяют условие и требование задач, выявляют, что моделью реальных объектов – поля, театрального зала, сцены и портала сцены является прямоугольник. Из темы «Наглядная геометрия» учащимся уже известно, как найти площадь прямоугольника, поэтому они записывают действия, которые направлены на нахождение ответа на поставленные в задачах вопросы. На этом этапе учащиеся находят ответ только на вопрос первой задачи, при решении которой выполняют умножение натуральных чисел, т. е. действия, правила выполнения которых им известны.

Решение задач учащимися

Задача 1	*Задача 2*	
	первый вопрос	*второй вопрос*
$298 \bullet 31 = 9238$ (м^2) – площадь подсолнухового поля. **Ответ**: 9238 м^2.	$29{,}8 \bullet 31 = ?$ (м^2) – площадь зала Большого театра. **Ответ**: ? м^2	а) $22{,}8 \bullet 39{,}3 = ?$ (м^2) – площадь сцены б) $21{,}5 \bullet 17{,}2 = ?$ (м^2) – площадь портала сцены. **Ответ**: ? м^2, ? м^2.

Затем пятиклассники сравнивают решения задач и выявляют, что произведение в решении первой задачи отличается от произведения к первому вопросу второй задачи тем, что один из множителей в 10 раз меньше. Вспоминают, как изменяется произведение при уменьшении множителя в некоторое количество раз, и формулируют вывод: значение произведения будет в десять раз меньше, т. к. $298 \bullet 31 = 9238$, то $29{,}8 \bullet 31 = 923{,}8$. Следовательно, $923{,}8\ м^2$ – площадь зала Большого театра.

При поиске ответа на второй вопрос задачи учащиеся рассуждают аналогично.

Рассуждения учащихся:

– если бы были произведения натуральных чисел, записанные теми же цифрами, что и десятичные дроби – $228 \bullet 393$ и $215 \bullet 172$, – то можно было бы вычислить значение произведения, используя правило умножения натуральных чисел;

– так как каждый из множителей в произведениях $22{,}8 \bullet 39{,}3$ и $21{,}5 \bullet 17{,}2$ в 10 раз меньше, то значение произведения в 100 раз меньше;

– так как значение произведения меньше в 100 раз, то в значении произведения натуральных чисел нужно перенести запятую на два знака влево: так как $228 \bullet 393 = 89604$, то $22{,}8 \bullet 39{,}3 = 896{,}04$.

Создалась проблемная ситуация: как найти количество знаков, на которое нужно перенести запятую. Учащиеся продолжают рассуждения:

– так как должны перенести запятую на два знака влево и общее количество знаков после запятой в обоих множителях равно двум, то количество знаков, на которое нужно перенести запятую, равно сумме знаков после запятой в обоих множителях.

Таким образом, в результате сравнения количества знаков после запятой в обоих множителях и в значении произведения учащиеся находят путь выхода из проблемной ситуации.

Далее учитель организует обобщение деятельности и формулирование правила выполнения умножения десятичных дробей. Учащиеся формулируют правило умножения десятичных дробей, сравнивают сформулированное правило с правилом, данным в учебнике, при необходимости корректируют сформулированное правило и составляют карточку-памятку, содержащую предписание для выполнения умножения десятичных дробей.

Предписание «Умножение десятичных дробей»

1) Записать десятичные дроби в столбик, не обращая внимание на запятую, т. е. аналогично записи умножения в столбик натуральных чисел.
2) Выполнить умножение, не обращая внимание на запятую.
3) Подсчитать общее количество знаков после запятой в множителях.
4) В произведении поставить запятую, отделив справа запятой столько знаков, сколько их в обоих множителях.

2.4.5. Поэтапное открытие учащимися правил деления десятичной дроби на натуральное число и десятичную дробь

Деление, в котором один или оба компонента являются десятичной дробью, – действие, которое по сравнению с другими арифметическими действиями вызывает наибольшие трудности у учащихся. Поэтому в этом случае знакомство с делением чисел нужно организовать с постепенным нарастанием сложности заданий.

Результатом деления может быть натуральное число, обыкновенная дробь или смешанная дробь, которую можно или нельзя записать в виде конечной десятичной дроби. Поэтому при формировании умений деления десятичных дробей на натуральное число или десятичную дробь нужно обратить внимание учащихся не только на последовательность действий при делении, но и на результат деления и на форму его записи.

Как известно, деление натурального числа или десятичной дроби на десятичную дробь сводится к делению числа на натуральное число, в связи с этим первоначально необходимо сформировать у учащихся умение деления десятичной дроби на натуральное число.

Деление десятичной дроби на натуральное число

Организация процесса самостоятельного открытия правил сложения, вычитания и умножения десятичных дробей опирается на выполнение этих действий с натуральными числами, обыкновенными или смешанными дробями и их свойства, т. е. на правила, которые известны учащимся. Ориентируясь на такой подход, покажем организацию процесса открытия учащимися правила деления десятичной дроби на натуральное число.

На первом этапе учитель организует сравнение компонентов деления натуральных чисел и десятичной дроби на натуральное число, подобрав такие числа, которые вызовут у учащихся наименьшие затруднения. Учащиеся выполняют деление натуральных чисел и десятичной дроби на натуральное число, записывая десятичную дробь в форме обыкновенной дроби.

$6 : 2 = 3$	$0{,}6 : 2 = \frac{6}{10} : 2 = \frac{3}{10} = 0{,}3$
$20 : 5 = 4$	$0{,}2 : 5 = \frac{2}{10} : 5 = \frac{20}{100} : 5 = 0{,}04$
$12 : 3 = 4$	$1{,}2 : 3 = \frac{12}{10} : 3 = \frac{4}{10} = 0{,}4$
$513 : 3 = 171$	$51{,}3 : 3 = \frac{513}{10} : 3 = \frac{171}{10} = 17{,}1$
	$5{,}13 : 3 = \frac{513}{100} : 3 = \frac{171}{100} = 1{,}71$
	$0{,}513 : 3 = \frac{513}{1000} : 3 = \frac{171}{1000} = 0{,}171$

Рассуждения учащихся при сравнении компонентов деления:

– так как натуральное число, составленное из тех же цифр, что и десятичная дробь, делится на другое натуральное число, то можно выполнить деление десятичной дроби на натуральное число, записав сначала дробь в форме обыкновенной дроби;

– так как получили обыкновенную дробь, которую можно записать в форме десятичной дроби, то выполним переход от записи частного в форме обыкновенной дроби к десятичной форме записи.

Во всех случаях результатом деления была десятичная дробь.

На втором этапе учитель создает проблемную ситуацию с помощью задачи, связанной с реальным спортивным событием.

Задача «Фигурное катание».

26–28 апреля 2022 года состоялись Всероссийские соревнования «Южный бриз», которые проводились на ледовой арене дворца спорта «Большой» в Сочи.

Во время соревнований по синхронному катанию судьи поставили команде «Жемчужина» следующие баллы: 7,75; 7,50; 7,83; 8,00; 8,00; за композицию сумма баллов равна 62,53; за элементы – сумма баллов 61,13.

Учитель составляет вопросы, ориентированные на выполнение деления десятичной дроби на натуральное число, например:

– Каков средний балл команды за синхронное катание?

– Каков общий средний балл получила команда за синхронное катание?

Рассуждения учащихся:

– так как средний балл равен среднему арифметическому выставленных баллов, то надо вычислить среднее арифметическое известных баллов.

1)	7,75; 7,50; 7,83; 8,00; 8,00	$(7{,}75 + 7{,}50 + 7{,}83 + 8{,}00 + 8{,}00) : 5 = 39{,}08 : 5 = ?$
2)	7,75; 7,50; 7,83; 8,00; 8,00; 62,53; 61,13	$(7{,}75 + 7{,}50 + 7{,}83 + 8{,}00 + 8{,}00 + 62{,}53 + 61{,}13) : 7 =$ $= (39{,}08 + 62{,}53 + 61{,}13) : 7 = 162{,}74 : 7 = ?$

– так как натуральные числа 3908 и 16274 не делятся нацело соответственно на 5 и 7 нацело, то как найти значения выражений $39{,}08 : 5$ и $162{,}74 : 7$?

Под руководством учителя школьники ищут выход из проблемы.

Учащиеся представляют найденные суммы баллов в виде сумм так, чтобы слагаемые делились на 5 и 7 соответственно, при этом выделяют наибольшие слагаемые из числа суммы баллов.

1)	7,75; 7,50; 7,83; 8,00; 8,00	$(7{,}75 + 7{,}50 + 7{,}83 + 8{,}00 + 8{,}00){:}\,5 = 39{,}08{:}\,5 = ?$ $39{,}08{:}\,5 = (35 + 4{,}08){:}\,5 = (35 + 4 + 0{,}05 + 0{,}03){:}\,5 =$ $= 7 + 0{,}8 + 0{,}01 + 0{,}030{:}\,5 = 7 + 0{,}8 + 0{,}01 + 0{,}006$ $= 7{,}816$
2)	7,75; 7,50; 7,83; 8,00; 8,00; 62,53; 61,13	$(7{,}75 + 7{,}50 + 7{,}83 + 8{,}00 + 8{,}00 + 62{,}53 + 61{,}13){:}\,7 =$ $= (39{,}08 + 62{,}53 + 61{,}13){:}\,7 = 162{,}74{:}\,7 = ?$ $162{,}74{:}\,7 = (140 + 22{,}74){:}\,7$ $= (140 + 21 + 1{,}4 + 0{,}28 + 0{,}06){:}\,7 =$ $= 20 + 3 + 0{,}2 + 0{,}04 + 0{,}06{:}\,7 = 23{,}24 + 0{,}06{:}\,7$ $162{,}74{:}\,7 = \frac{16274}{100}{:}\,7 = \frac{162274}{100 \bullet 7} = 23\frac{87}{350}$

В результате анализа полученных выражений выявлено, что:

1) при ответе на первый вопрос получилась десятичная дробь, а во втором случае не удалось выполнить деление до конца;

2) выделение наибольших слагаемых из значений сумм баллов, которые делятся на 5 и 7 соответственно, отражает позиционный состав числа с учетом деления на число;

3) запись деления через разложение числа на слагаемые, во-первых, трудоемко, а во-вторых, не всегда удается выполнить деление.

На третьем этапе учитель или кто-то из учащихся предлагает выполнить деление в столбик, опираясь на позиционный состав десятичной дроби.

Учитель сначала демонстрирует образцы записи и предлагает учащимся самостоятельно записать деление в столбик в рамках решения первой задачи, затем на доске выполняет комментируемое деление, акцентируя внимание учащихся на правильной последовательности выполнения действий при делении. Учащиеся сравнивают свою запись с записью учителя и корректируют ее при необходимости.

−39,080 | 5
  35 | 7,816
 −40
  40
  −8
   5
  −30
   30
    0
 	
$39{,}08:5 = 7{,}816$
	−162,74 | 7
	  14 | 23,24…
	 −22
	  21
	  −17
	   14
	   −34
	    28
	     6
	
	$162{,}74:7 = 23\frac{174}{700} = 23\frac{87}{350}$

Во втором случае, так как деление десятичной дроби на натуральное число не завершилось, учитель демонстрирует, как записать частное в таких случаях, отмечая, что в этом случае целесообразно перейти к записи в виде дроби обыкновенной.

Затем учитель организует обобщение учащимися выполненной деятельности через рассмотрение различных частных случаев, формулирование правила деления десятичной дроби на натуральное число. Учащиеся составляют памятку, включая образцы выполнения деления в столбик.

Памятка. Деление десятичной дроби на натуральное число

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как и деление натуральных чисел, при этом сразу после того, как завершено деление целой части, в частном ставят запятую.		

−15 | 8
  8 | 1,875
 −70
  64
  −60
   56
   −40
    40
     0
	−1,89 | 7
	  0 | 0,27
	 −18
	  14
	  −49
	   49
	    0
		−74,7 | 12
		  72 | 6,225
		 −27
		  24
		  −30
		   24
		   −60
		    60
		     0

Деление числа на десятичную дробь

Следующий этап посвящен формированию умения деления на десятичную дробь.

На этом этапе целесообразно предложить учащимся рассмотреть два случая: деление натурального числа на десятичную дробь и деление десятичной дроби на десятичную дробь. Аналогично рассмотренному выше процессу организация открытия правила деления на десятичную дробь базируется на деятельностном подходе. Следовательно, учитель может использовать для этого задачи, известные числовые данные которых представлены натуральными и десятичными дробями, записанными с помощью одинаковых цифр.

Учитель предлагает учащимся записать решение задач, а потом сравнить и проанализировать их или организует анализ и сравнение уже готовых решений. В обоих случаях в результате сравнения решений выявляется аналогичность и отличия в компонентах действий решения. Кроме того, знание правила деления десятичной дроби на натуральное число помогает учащимся сформулировать правило деления натурального числа или десятичной дроби на десятичную дробь. Приведем, примеры задач для открытия правил деления на десятичную дробь.

Учитель, создавая проблемную ситуацию, ставит перед учащимися учебную задачу: выявить аналогию и различия условий и требований задач и обосновать изменение значений частного.

	Номер и текст задачи	*Решение задачи*
1	Около дедушкиного дома в деревне большой приусадебный участок прямоугольной формы. Найдите длину приусадебного участка, если его площадь равна 2048$м^2$, а ширина равна 32 м.	$2048:32=64$ (м) – длина приусадебного участка. *Ответ*: 64 м.

2	Около дедушкиного дома в деревне большой приусадебный участок, на котором помимо дома и огорода расположен фруктовый сад. Много разных плодовых деревьев растёт в саду. Есть яблони, вишни, сливы, абрикосы. Найдите ширину прямоугольного участка, на котором расположен фруктовый сад, если его площадь равна $204{,}8 м^2$, а длина равна 32 м.	$204{,}8 : 32 = 6{,}4$ (м) – ширина фруктового сада. *Ответ*: 6,4 м.
3	Около дедушкиного дома в деревне большой приусадебный участок, на котором помимо дома и огорода расположен фруктовый сад. На чердаке дома хранятся разные старые вещи, которые могут рассказать много историй, связанных с домом и жизнью его обитателей. Найдите длину чердака, если он имеет правильную прямоугольную форму, его площадь равна $20{,}48 м^2$, а длина – 3,2 м.	$20{,}48 : 3{,}2 = 6{,}4$ (м) – длина чердака. *Ответ*: 6,4 м.

Учитель руководит деятельностью учащихся, задавая при необходимости наводящие вопросы. После обсуждения задач и их решений учитель предлагает обобщить выполненные действия с числами, добавив случай, не относящийся к решению задач, когда делимое и делитель в выражении к первой задаче одновременно уменьшаются в 10, 100 и т. д. раз.

Рассуждения учащихся:

– так как во всех трех задачах геометрической моделью разных участков является прямоугольник, то, зная его площадь и одно из измерений, вычисляют второе измерение прямоугольника;

– числовые данные размеров участков записаны с помощью одинаковых цифр в одной и той же последовательности, но в разных формах;

– изменение частного в 10 раз в решении второй задачи по сравнению с первой объясняется уменьшением в 10 раз делимого;

– одновременное уменьшение делимого и делителя в 10 раз в третьей задаче по сравнению со второй не привело к изменению частного;

– если делимое и делитель в выражении $2048:32=64$ одновременно уменьшать в 10, 100 и т. д. раз, то частное остается без изменения:

$$204{,}8:3{,}2=64;\ 20{,}48:0{,}32=64;\ 2{,}048:0{,}032=64.$$

Вывод: деление на десятичную дробь можно заменить делением на натуральное число.

Результатом деятельности учащихся является сформулированное правило.

Предписание деления натурального числа и десятиной дроби на десятичную дробь

Деление на десятичную дробь сводится к делению на натуральное число.
1) В делимом и делителе перенести запятую на столько знаков вправо, сколько их содержится после запятой в делителе. 2) Выполнить деление на натуральное число. 3) Если в делимом не хватает знаков, то справа приписать нули.

2.4.6. Формирование умения оперировать понятием «десятичная дробь»

Умение оперировать математическим понятием является одним из требований ФГОС ООО к предметным результатам обучения математике. Умение оперировать понятием «десятичная дробь» помимо сформированности его восприятия как формы записи числа, умения характеризовать связь с понятиями «натуральное число», «обыкновенная дробь» и представления десятичной дроби в виде обыкновенной включает использование этого понятия при проведении рассуждений, доказательстве и решении задач.

Кроме этого, умение оперировать понятием «десятичная дробь» включает его использование при решении контекстных и практико-ориентированных задач. Следовательно, процесс формирования умений оперировать понятиям «десятичная дробь» при изучении математики целесообразно организовать в единстве с формированием функциональной математической грамотности. Поэтому при изучении темы «Десятичные дроби» необходимо включать задания, отражающие реальные события и жизненные ситуации не только при открытии понятия и правил выполнения арифметических действий, но и при формировании и развитии умений применения его свойств, проведении рассуждений, доказательстве каких-либо фактов и решении задач в реальной жизни. Приведем примеры заданий.

Первое знакомство с историей острова Врангеля произошло у учащихся при выполнении заданий в направлении формирования ФМГ при изучении темы «Натуральные числа».

Задание « Остров Врангеля»

В Северном Ледовитом океане между Восточно-Сибирским морем и Чукотским морем расположен российский остров Врангеля, который назван в честь российского мореплавателя и государственного деятеля XIX века Фердинанда Петровича Врангеля. Остров находится на границе Западного и Восточного полушарий и разделяется 180-м меридианом на две почти равные части. Отделён от материка (северное побережье Чукотки) проливом Лонга, шириной в самой узкой части около 140 км. Площадь острова составляет около 7670 км², из которых около 4700 км² занимают горы.

На этом небольшом по площади острове господствуют два типа климата. На прибрежных равнинах под влиянием моря зимой температура опускается до 25–30 градусов Цельсия ниже нуля, а летом составляет лишь 1,5–3,5 градуса Цельсия.

Климат острова Врангеля (норма 1981-2010 гг)

Показатель	Янв.	Фев.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сен.	Окт.	Нояб.	Дек.	Год
Абсолютный максимум, °C	1,5	−0,2	0,2	2,5	9,6	15,9	18,2	16,7	11,9	5,3	1,8	2,0	18,2
Средний максимум, °C	−19,4	−19,9	−18,6	−12,8	−2,9	3,4	5,9	5,2	1,8	−4,1	−10,4	−16,8	−7,4
Средняя температура, °C	−22,8	−23,5	−22,4	−16,6	−5,7	0,9	3	2,8	0,0	−6,1	−12,9	−19,7	−10,3
Средний минимум, °C	−26,4	−27	−26,1	−20,4	−8,2	−1	1,0	0,9	−1,7	−8,4	−15,7	−22,8	−13
Абсолютный минимум, °C	−42	−44,6	−45	−38,2	−31,5	−12,3	−4,9	−6,5	−21,4	−29,8	−34,9	−57,7	−57,7
Норма осадков, мм	7	7	5	7	8	10	21	25	17	13	10	8	138

Температура воздуха на острове Врангеля в аномально тёплом 2007 году Компиляция данных с сайта «Погода и Климат» (недоступная ссылка). *www.pogodaiklimat.ru*. Дата обращения: 19 апреля 2014. Архивировано 19 апреля 2014 года.

Месяц	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек	Год
Абсолютный максимум, °C	−13,2	−1,9	−7,8	−2,0	4,0	10,9	14,2	14,8	11,8	3,3	0,0	2,0	14,8
Средний максимум, °C	−23,5	−15,9	−17,7	−8,7	−3,2	5,3	9,8	12,6	8,2	−0,4	−4,4	−9,6	−4,0
Средняя температура, °C	−26,1	−20,2	−22,0	−12,6	−6,4	2,1	6,9	11,1	7,0	−1,4	−5,8	−11,9	−6,6
Средний минимум, °C	−28,4	−22,5	−25,7	−16,4	−8,9	0,2	4,6	9,3	5,7	−2,9	−7,9	−14,6	−9,0
Абсолютный минимум, °C	−34,6	−33,0	−32,6	−23,2	−17,3	−2,3	1,2	7,6	0,8	−7,5	−10,5	−26,0	−34,6

Остров Врангеля // Википедия. – URL: [Википедия. Остров Врангеля.]

При изучении десятичных дробей можно организовать исследование климатических условий на острове. Например, составить вопросы к тексту, направленные на сравнение температур, вычисление разницы температур.

Так как в 5-м классе учащиеся еще не изучают отрицательные числа, то для составления вопросов берем информацию о температуре только летом, а при изучении отрицательных чисел в 6-м классе можно вернуться к этому заданию.

Вопросы по теме «Десятичные дроби»:

- Какая самая высокая температура летом была зафиксирована на острове Врангеля?
- Какая самая низкая температура летом была зафиксирована на острове?
- Вычислите разницу между наибольшей и наименьшей летними температурами.
- Расположите месяцы по возрастанию (убыванию) средних температур летом.
- Изобразите на координатной прямой точки, координатами которых являются значения летних температур.
- Укажите, какое приближённое значение ближе других к точному значению площади острова Врангеля:

  1) 7 тыс. км^2 2) 7,5 тыс. км^2 3) 8 тыс. км^2?

Вопросы для дальнейшего использования:

- Какие из следующих событий, связанных с историей острова Врангеля, относятся к XIX веку?

  а) Впервые остров на карту нанёс русский первопроходец Иван Львов, это произошло не позднее 1707 года.

  б) Более точно расположение острова определил Ф. П. Врангель в ходе экспедиций 1820–1824 годов.

  в) В 1867 остров был назван в честь русского путешественника и государственного деятеля Фердинанда Петровича Врангеля.

  г) В сентябре 1911 года на острове Врангеля был поднят российский флаг.

  д) В 1926 году на острове Врангеля было основано поселение Ушаковское и открыта полярная станция.
- Какую часть острова занимают горы? Выразите десятичной дробью и в процентах.

– Вычислите разницу между абсолютным максимумом и абсолютным минимумом температур в мае, в июне.
– Проанализируйте температурные данные 2007 года и постройте по этим данным диаграмму, выбрав подходящий для этого вид диаграммы.

В этом задании текст составной: информация представлена в привычной для учащихся словесной форме, а также в таблице. Этот пример показывает, что можно использовать одну реальную ситуацию при изучении разных тем, но используя разные факты о ситуации и числовые данные.

Задание «Путешествуем по столице. Живописный мост» показывает возможность создания цикла заданий, объединенных одной темой, например «Путешествуем по столице». Использование задачи «Путешествуем по столице. Большой театр» из этого цикла было показано при открытии правил умножения десятичных дробей.

Задание «Путешествуем по столице. Живописный мост».

Длина перехода вантового Живописного моста, расположенного в Москве, составляет 1460 м, ширина – 37 м, длина основного пролёта 409,5 м, число вант – 72. Расстояние от поверхности воды до дорожного полотна – около 30 м.

Мостовой переход рассчитан на восемь полос движения – по четыре в каждом направлении. Каждая полоса имеет ширину 3,75 м с разделительной полосой 2,0–2,6 м, метровой полосой безопасности и тротуарами по 1,5 м с обеих сторон.

На подходах к мосту установлены лестничные сходы. Несущие конструкции моста окрашены в красный цвет. Сами ванты состоят из высокопрочных канатов, покрытых полиэтиленовой трубой.

Фундамент моста опирается на сваи длиной 20–40 м и диаметром 1,5 м. Сваи опираются на известняки, зацементированные для заполнения возможных карстовых пустот. Благодаря уникальной особенности мост мог бы раскачиваться, как качели, но для исключения неконтролируемых колебаний на одной из опор установлены гасители колебаний – демпферы.

Вопросы по теме «Десятичные дроби»:

– Вычислите ширину полос в одном направлении.
– Вычислите среднее значение ширины разделительной полосы.
– Вычислите ширину мостового перехода, используя среднее значение ширины разделительной полосы.

Вопросы для дальнейшего использования:

– Вычислите объём одной сваи, на которую опирается мост.
– Вычислите площадь основного пролёта моста, пренебрегая изгибами полотна моста.
– Сконструируйте математическую модель полотна моста, пренебрегая изгибами полотна.

В следующем примере приведено задание «Путешествуем по столице. Большой театр», но информация об истории и конструктивных особенностях зала и сцены по сравнению с задачей, которую рассмотрели ранее, расширены. Составлены вопросы по теме «Десятичные дроби» и для дальнейшего использования. Таким образом, это задание иллюстрирует возможность использования одной темы в разных дидактических целях.

Задание «Путешествуем по столице. Большой театр».

До пожара 11 марта 1853 г. основная сцена театра представляла собой пятиярусный зрительный зал на 2155 мест. В 1855 г. зал стал шестиярусным и вмещал почти 2300 зрителей.

В 1924–1959 гг. длина основного зала с учётом оркестровой раковины равнялась 29,8 м, ширина – 31 м, высота – 19,6 м. Глубина сцены – 22,8 м, ширина – 39,3 м, размер портала сцены – 21,5×17,2 м.

Большой театр, 1956 г.

В 1961 г. Большой театр получил новую сценическую площадку – только что возведённый Кремлёвский Дворец съездов (зрительный зал на 6000 мест; размер сцены в плане – 40×23 м и в высоту – 28,8 м, портал сцены – 32×14 м; сцена оборудована шестнадцатью подъёмно-опускными площадками).

1 октября 2011 г. после ремонта в течение 6 лет и 3 месяцев Большой театр открылся для зрителей. За время ремонта театр оборудовали самой современной техникой, провели реставрацию и возвели самую большую сцену

в Европе. Размер главной сцены составил 21×21 м. В зрительном зале теперь 1720 мест. Возвращена акустика, какой она была в XIX веке.

Вопросы по теме «Десятичные дроби»:

– Найдите площадь основного зала Большого театра.
– Вычислите площадь сцены и портала сцены.
– Вычислите, на сколько метров портал основной сцены Большого театра отличался от портала Кремлёвского Дворца съездов.

Вопросы для дальнейшего использования:

– Сколько всего числительных в тексте?
– Выявите геометрические модели, соответствующие конструктивным элементам здания Большого театра.
– Постройте диаграмму, отражающую изменение количества мест в зрительном зале исторической сцены на протяжении существования Большого театра.

Отметим, что в тексте задачи недостаточно информации для построения диаграммы, следовательно, учащимся нужно будет выполнить действия в направлении использования умений работать с информацией, в частности: найти и отобрать источники информации, сравнить и проанализировать единицы информации, отобрать необходимые единицы информации.

Каждый уголок нашей страны имеет свою историю, свои достопримечательности, используя которые, учитель может сконструировать задания, связанные с жизнью района, области, конкретного города или села. Например, в подмосковном городе Павловский Посад родился советский и российский актер В. В. Тихонов, в Смоленской области родился лётчик-космонавт Ю.А. Гагарин, в Тульской области – писатель Л. Н. Толстой. Такой подход показывает, что на уроках математики при изучении различных тем можно организовать патриотическое воспитание учащихся.

Задание «Актёр театра и кино Вячеслав Васильевич Тихонов».

Советский и российский актёр театра и кино Вячеслав Васильевич Тихонов (08.02.1928–04.12.2009) родился 8 февраля 1928 г. в Павловском Посаде Московской губернии (ныне – Московская область). Он известен исполнением острохарактерных и драматических ролей более чем в 50 фильмах и телесериалах, среди которых: князь Андрей Болконский в фильме «Война и мир» (1965–1967); учитель истории Илья Семёнович Мельников в фильме «Доживём до понедельника» (1967–1968); советский разведчик Максим Максимович Исаев (штандартенфюрер СС Штирлиц) в фильме «Семнадцать мгновений весны» (1969–1973); писатель Иван Иванович Иванов в фильме «Белый Бим Черное ухо» (1977).

В городе Павловский Посад с 2017 года проводится Международный кинофестиваль имени В. Тихонова, получивший название «17 мгновений», а 25 августа 2018 г. в доме, где родился и жил в детстве актёр, был открыт музей.

Именем Вячеслава Тихонова названо морское судно геофизической разведки судоходной компании «Совкомфлот» (спущено на воду в августе 2011 г., флаг поднят 16 сентября 2011 г.). Уникальные инженерные параметры судна позволяют производить работы в экстремальных условиях Арктики и понижают потребление топлива.

Основные параметры судна: водоизмещение 5453 тонны, дедвейт 1693 тонны, длина 84,22 метра, ширина 17,0 метров, высота борта 7,5 метра, осадка 6,1 метра, скорость хода 18,5 узла.

Судно «Вячеслав Тихонов» оснащено современным научным оборудованием и обладает рядом уникальных инженерных и технических характеристик: специальная форма корпуса, специальная форма носовой и кормовой оконечностей, 8 сейсмических кос, оптимизированные параметры дизель-электрической установки и пропульсивного комплекса, возможность вести бесперебойную работу в условиях низких температур.

Научное судно «Вячеслав Тихонов» // Водный транспорт. – URL: http://sea-transport.ru/nauchno-isledovatelskie-suda/1008-vyacheslav-tikhonov.html

Вопросы по теме «Десятичные дроби»:

– В каком веке родился В.В. Тихонов?

– Сколько лет назад спущено на воду судно «Вячеслав Тихонов»?

– Выразите скорость хода судна в км/ч. Вычислите погрешность перевода скорости из одних единиц измерения в другие.

– Вычислите объём судна, пренебрегая формой подводной части судна и выбрав соответствующую геометрическую модель.

Вопросы для дальнейшего использования:

– Судно, идущее на скорости в 1 узел вдоль меридиана, за один час проходит одну угловую минуту географической широты. Какую часть угловой минуты географической широты проходит судно на скорости в 18,5 узлов?

Перевод одних единиц измерения скорости в другие

По международному определению, 1 узел = 1852 м/ч, точнее 0,51444... м/с. *Мнемоническое правило* даёт значения с погрешностью менее 3 %. 1) **узлы в км/ч**: скорость в узлах умножь на два и вычти 10 процентов. Например, 18,5 узлов = 33,3 км/ч: $18{,}5 \bullet 2 = 37$ км/ч, $10\% = 3{,}7$ км/ч, $37 - 3{,}7 = 33{,}3$ (км/ч)
2) **км/ч в узлы**: скорость в км/ч раздели на два и прибавь 10 процентов. Например, 30 км/ч = 16,5 узлов: $30 : 2 = 15$ (узлов), $10\% = 1{,}5$ узлов, $15 + 1{,}5 = 16{,}5$ (узлов)

Подведем итоги

Формирование планируемых результатов обучения теме «Десятичные дроби», включающих наряду с личностными, метапредметными и предметными результатами функциональную математическую грамотность, осуществляется при специально организованной деятельности учащихся.

Самостоятельное открытие понятия «десятичная дробь» позволяет формировать восприятие этого понятия не как нового числа, а как новой формы записи чисел.

Самостоятельное открытие правил выполнения арифметических действий и свойств арифметических действий при работе с десятичными дробями способствует формированию умения более осмысленного выполнения действий с десятичными дробями.

Включение заданий, связанных с реальными жизненными ситуациями, ориентированными на субъективный опыт обучающихся, обеспечивает формирование умения распознавать проявления понятия «десятичная дробь» в реальных жизненных ситуациях, раскрывает применение и акцентирует важность математики для жизни.

Включение задач и заданий, связанных с историей нашей страны, города, жизнью людей, позволяет организовать учителю деятельность в направлении личностного развития учащихся, в частности, патриотического, эстетического, экологического воспитания, что раскрывает большие возможности математики как школьного предмета.

При оценивании сформированности понятия «десятичная дробь» и умений оперировать с ним на разных этапах изучения темы используется дифференцированный контроль, ориентированный также и на выявление сформированности функциональной математической грамотности.

Образовательный процесс по теме «Десятичные дроби», базирующийся на системно-деятельностном, личностно-ориентированном и компетентностном подходах, способствует формированию умения оперировать понятием «десятичная дробь» на более высоком уровне.

2.5. Наглядная геометрия в 5-м классе: особенности развития геометрических представлений младших подростков

2.5.1. Основные положения и планируемые результаты обучения теме «Наглядная геометрия»

В соответствии с Примерной рабочей программой по математике основного общего образования базового уровня в 5–6-х классах изучается интегрированный курс «Математика», в который кроме числовой содержательной линии, связанной с формированием умений оперировать такими понятиями, как «натуральное число», «обыкновенные и десятичные дроби», включается наглядная геометрия.

Современные авторы под наглядной геометрией понимают изучение плоских фигур и пространственных тел, которое, во-первых, основано на предметной деятельности учащихся, во-вторых, опирается на их жизненный опыт и пространственные представления, полученные из ближайшей природной и социальной среды, в-третьих, вовлекает в работу преимущественно наглядно-образное мышление учащихся, развивая и обогащая его.

Такой подход к изучению темы «Наглядная геометрия» в 5-м классе отражен и в разделении темы на три тематических раздела: «Линии на плоскости», «Многоугольники», «Тела и фигуры в пространстве», представленных в Примерной рабочей программе.

Тематическим планированием программы на изучение темы отводится 31 ч, которые распределены между тематическими разделами следующим образом: «Линии на плоскости» – 12 ч, «Многоугольники» – 10 ч, «Тела и фигуры в пространстве» – 9 ч.

Планируемые результаты освоения темы, представленные в программе, включают метапредметные результаты, в т. ч. УУД, предметные, которые отражены в основном содержании темы по разделам (см. таблицу 13) и достижение цели формирования функциональной математической грамотности на уровне темы. Изучение наглядной геометрии должно, с одной стороны, обеспечивать преемственность изучения геометрической составляющей в начальной школе, а с другой, – являться пропедевтикой систематического курса изучения геометрии.

Таблица 13

Тематическое планирование по теме «Наглядная геометрия», 31 ч

Основное содержание темы	
Наглядная геометрия. Линии на плоскости, 12 ч	Точка, прямая, отрезок, луч, ломаная. Длина отрезка, метрические единицы измерения длины. Длина ломаной. Угол, вершина и стороны угла. Прямой, острый, тупой и развернутый углы. Сравнение углов наложением. Измерение углов. Измерение и построение углов с помощью транспортира. Биссектриса угла. Окружность и круг
Наглядная геометрия. Многоугольники, 10 ч	Многоугольники. Площадь и периметр многоугольника. Единицы измерения периметра и площади. Треугольник. Виды треугольников. Периметр и площадь треугольника. Четырехугольник, прямоугольник, квадрат. Площадь и периметр прямоугольника. Площадь многоугольников, составленных из прямоугольников
Наглядная геометрия. Тела и фигуры в пространстве, 9 ч	Многогранники. Изображение многогранников. Модели пространственных тел. Прямоугольный параллелепипед, куб. Развертки куба и параллелепипеда. Объем, единицы измерения объема. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда

Поэтому целью изучения наглядной геометрии является формирование у учащихся опыта геометрической деятельности, обеспечивающего подготовку к изучению систематического курса геометрии. Достижение цели осуществляется через ознакомление с геометрическими фигурами и их свойствами, знакомство с геометрическими методами исследования, приобретение изобразительно-графических умений, измерительных навыков, развитие пространственных представлений, геометрического мышления, творческих способностей.

Курс наглядно-деятельностной геометрии не предполагает изучение геометрической теории как таковой, обучение организуется как процесс интеллектуально-практической деятельности, связанной с различными геометрическими объектами и направленной на развитие геометрического кругозора, воображения, зоркости, интуиции.

Существенно, что изучение геометрии на досистематическом этапе разворачивается практически на том же содержании, что и систематический курс, при этом планиметрия и стереометрия выступают равноправными партнерами. Предметом изучения здесь являются геометрические фигуры (угол, треугольник, прямоугольник, квадрат, окружность, параллелепипед, куб и др.), геометрические величины (длина, площадь, объем, мера угла и др.) и математические отношения (равенство, параллельность и др.).

И. Ф. Шарыгин писал, что в 5–6-х классах «геометрия выступает в виде естественно-научного предмета, основные методы получения геометрического знания – наблюдение, эксперимент, возможно, умозрительный. В каком-то смысле, на этом этапе мы имеем аналог доевклидового этапа развития геометрии, но с некоторыми включениями достижений современной науки. На примере геометрии учащиеся знакомятся с важнейшими общенаучными идеями, понятиями и методами исследования: свойство и признак, классификация объектов, непрерывность и дискретность, перебор вариантов и т. д. Особенно важной на этом этапе является учебная геометрическая деятельность, связанная с пространственными объектами. Логикой изложения геометрического содержания должно стать сочетание индуктивного подхода, основанного на интеллектуально-практическом опыте учащихся, и начал дедукции. В такой курс могут быть включены наглядные доказательства. Например, доказательство равенства углов при основании равнобедренного треугольника, принадлежащее Льюису Кэрроллу: «Возьмем равнобедренный треугольник, нарисованный, скажем, на листе бумаги. Вырежем его (ножницами или мысленно), перевернем и вложим его обратно. Нетрудно объяснить или реально проверить, что этот треугольник «заткнет» образовавшуюся дыру, а это и будет означать равенство соответствующих углов».

На основе деятельностного подхода в обучении и идеи усиления развивающей функции обучения теме «Наглядная геометрия» представлены основные виды деятельности учащихся на трех уровнях (см. таблицу 14), которые помогают индивидуализировать учебно-воспитательную работу с учетом интересов и способностей учащихся.

Таблица 14

Основные виды деятельности обучающихся при изучении темы «Наглядная геометрия»

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
Целеполагание изучения темы	Под руководством учителя пятиклассники анализируют уровни изучения темы «Наглядная геометрия», сопоставляют их с личностными целями изучения математики и ставят индивидуальные цели изучения темы		
Приобретение и формирование ПЗУ по теме и ПУД	Читать УИ по теме, выявлять главную единицу информации об изучаемых геометрических объектах: линиях на плоскости, многоугольниках, телах и фигурах в пространстве, сравнивать ее с информацией полностью готовых информационных схем, выявлять соответствие	Анализировать УИ по теме, выявлять главную единицу информации о геометрических объектах и нескольких второстепенных единицах; выявлять связи между единицами информации о понятиях и делать выводы, содержащие новые знания, составлять информационные схемы УИ, используя	Анализировать УИ по теме, выявлять главную единицу информации, основные и второстепенные единицы; выявлять связи между единицами информации, изучаемыми понятиями и геометрическими объектами. Исследовать фигуры и конфигурации из фигур, выявлять их свойства,

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	между основными единицами в тексте и в схеме. Распознавать на рисунках геометрические объекты	различные формы. Выявлять зависимости между единицами метрической системы мер. Обсуждать способы построения	в том числе используя цифровые ресурсы. Знакомиться с неметрическими системами мер. Предлагать алгоритмы построения, составлять предписания
Применение ПЗУ по теме и ПУД	***Знает*:** – терминологию по теме. ***Умеет*:** – объяснять своими словами термины; – распознавать изучаемые геометрические фигуры на чертежах и рисунках; – изображать с помощью чертежных инструментов	***Знает:*** – свойства изучаемых геометрических фигур, правила построения геометрических фигур. ***Умеет:*** – формулировать определения понятий; – описывать изображения, используя терминологию;	***Знает:*** – приемы проведения исследования, моделирования. ***Умеет:*** – исследовать свойства геометрических фигур путем эксперимента и моделирования; – исследовать зависимость площади квадрата от длины его стороны;

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	изучаемые геометрические фигуры на клетчатой бумаге; – использовать свойства фигур и свойства квадратной сетки для построения фигур и разбиения фигуры на квадраты и прямоугольники; – измерять длину отрезка, величину угла, строить отрезок заданной длины, угол заданной величины. – изображать простейшие конфигурации геометрических фигур на клетчатой бумаге;	– изображать с помощью инструментов и от руки конфигурации изучаемых фигур на нелинованной и клетчатой бумаге; – выражать величину площади в различных единицах измерения метрической системы мер, использовать зависимости между метрическими единицами измерения площади; находить измерения. – исследовать свойства геометрических фигур путем наблюдения и измерения; – сравнивать свойства фигур;	– оценивать линейные размеры фигур; – распознавать истинные и ложные высказывания о многоугольниках и многогранниках, приводить примеры и контрпримеры, строить высказывания и отрицания высказываний; – объяснять способ моделирования куба и параллелепипеда; – исследовать зависимость объема куба от длины его ребра, выдвигать и обосновывать гипотезу; – моделировать куб и

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	– распознавать развертки куба и параллелепипеда. ***Решение задач:*** – решать простейшие задачи: на построение геометрических фигур с заданными измерениями; на вычисление периметра треугольника, прямоугольника, многоугольника; на вычисление площади прямоугольника, квадрата; площади поверхности и объема куба и параллелепипеда, когда все линейные размеры известны	– конструировать математические предложения с помощью связок «некоторый», «любой»; – изображать развертки куба и параллелепипеда. ***Решение задач:*** – решать задачи повышенного уровня сложности на построение и достраивание фигур с частично заданными измерениями; на вычисление площади многогранников с использованием его разбиения на изучаемые фигуры; вычислять площади	параллелепипед и объяснять способ моделирования; – наблюдать и проводить аналогии между понятиями площади и объема, периметра и площади поверхности. **Решение задач:** – решать задачи высокого уровня сложности на построение геометрических фигур и их конфигураций; вычисление и доказательство фактов с выявлением недостающей информации и исследованием информации, содержащейся в неявном виде

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
		поверхности и объемы куба, прямоугольного параллелепипеда.	
Формирование и применение ФМГ	Распознавать в объектах реального мира форму изученных геометрических фигур. Извлекать информацию о форме и размерах реальных объектов из одного источника небольшого объема. Находить размеры реальных объектов, используя в явном виде формулы для нахождения площади и объема.	Распознавать в объектах реального мира конструктивные элементы изученных фигур. Выявлять, выбирать и объединять информацию о форме и размерах объектов из нескольких источников. Сравнивать и оценивать размеры реальных объектов. Работать с геометрическими моделями реальных объектов в знакомом контексте	Приводить примеры объектов реального мира, имеющих форму изученных фигур. Работать с большим объемом конструктивных (геометрических) характеристик реальных объектов, представленных в разных формах. Конструировать геометрические модели реальных объектов. Анализировать, сравнивать и оценивать стратегии решения,

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	Использовать знания по наглядной геометрии для решения задач базового уровня в знакомом контексте	без предписания или частично составленному. Сравнивать стратегии решения задачи и выбирать одну, аргументируя выбор	отбирать наиболее результативную стратегию для конкретной ситуации, предлагать свою стратегию для решения задачи
Формирование и применение РУД: самоорганизация и самоконтроль	*Под руководством учителя* или с помощью одноклассников: – выбирать задачи базового уровня сложности и решать их с помощью готовых образцов, предписаний и алгоритмов; – осуществлять проверку выполненной деятельности и ее результата с использованием готовых	*Самостоятельно при консультационном сотрудничестве с учителем:* – выбирать задачи повышенного уровня сложности; – выполнять самопроверку деятельности и ее результата частично с использованием приемов, алгоритмов или неполных предписаний и	*Самостоятельно:* – выбирать задачи высокого уровня сложности и решать их; – оценивать деятельность и ее результат по объективным критериям или собственным, сравнивая их с объективными критериями; – формулировать выводы о результатах деятельности и, при необходимости,

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	эталонов и полностью составленных алгоритмов	алгоритмов или по заданным критериям; – планировать и выполнять коррекцию УПД	выполнять коррекцию УПД; – обобщать деятельность и составлять алгоритм
Формирование и применение КУД: общение и сотрудничество	Работать в группе при выполнении общей задачи; решать личностные задачи базового уровня сложности в рамках общего задания	Рецензировать ответы товарищей, осуществлять поиск информации для решения задачи; осуществлять взаимоконтроль, взаимопроверку	Оказывать помощь учащимся, работающим на предыдущих уровнях; руководить деятельностью группы, корректируя ее при необходимости
Выявление уровня сформированности ПЗУ, УУД, ФМГ	Знать основные понятия по теме и уметь оперировать ими под руководством учителя или с помощью предписаний. Извлекать информацию	Оперировать понятиями в рамках темы. Уметь решать задачи повышенного уровня сложности, составлять обратные задачи,	Свободно оперировать понятиями. Решать задачи высокого уровня сложности: осуществлять поиск пути решения и выбор наиболее результативного;

Обобщенный вид деятельности	*Учебные действия обучающихся, характеризующие основные виды деятельности*		
	Первый уровень	*Второй уровень*	*Третий уровень*
	из одного источника или нескольких, но небольшого объема. Уметь решать задачи базового уровня сложности, включенные в систему, используя готовый образец или предписание	интегрировать различные виды представления задачи и ее решения, обобщать и оценивать выполненную деятельность и ее результат. Уметь выдвинуть несколько аргументов в процессе выполнения деятельности	составлять предписание, алгоритм для решения проблем и задач. Представлять результаты анализа выполненной деятельности и ее результатов. Уметь аргументировать свои действия

Список сокращений:

УИ – учебная информация

УПД – учебно-познавательная деятельность

ПЗУ – предметные знания и умения

УУД – универсальные учебные действия

ФМГ – функциональная математическая грамотность

ПУД – познавательные универсальные учебные действия: логические, исследовательские, работа с информацией

ПЛУД – познавательные логические учебные действия

ПИУД – познавательные исследовательские учебные действия

ПРИУД – познавательные учебные действия по работе с информацией

РУД – регулятивные универсальные учебные действия: самоорганизация и самоконтроль

КУД – коммуникативные универсальные учебные действия: общение и сотрудничество

2.5.2. Возрастная психология геометрического мышления обучающихся 10–12 лет

Формирование геометрических представлений и геометрического мышления тесно связано с общим развитием мышления обучающихся. Исследованиями психологов (Дж. Брунер, А. Валлон, В. В. Давыдов, А. В. Запорожец, Ж. Пиаже и др.) показано, что развитие мышления ребенка происходит в направлении от наглядно-действенного, основной специфической особенностью которого является связь с практическими действиями, к наглядно-образному, являющемуся способностью манипулировать образами без практических действий, и от образного к логическому, формирующемуся на основе чувственного восприятия и выступающего прежде всего в форме абстрактных понятий и суждений. Это дает возможность, не ограничиваясь опытом, оперировать гипотетическими утверждениями, мысленно представлять возможные случаи и делать выводы, проверяемые в дальнейшем путем эксперимента или наблюдения. При этом генетически более ранние виды мышления – наглядно-действенное и наглядно-образное – имеют собственное значение для всей последующей жизни человека, а также подготавливают переход к следующему виду, продолжая при этом свое развитие.

Наглядно-образное мышление сначала выступает как оперирование представлениями о конкретных предметах и их свойствах, а затем образное мышление предстает в качестве способности оперировать не самими предметами, а их графическими моделями: символами, схемами, условными изображениями.

Переход от наглядно-действенного к наглядно-образному мышлению зависит от уровня специально организованной деятельности, в процессе же стихийного обучения осуществляется медленно и недостаточно полно. По мнению российских психологов, формирование каждого вида мышления и его преобладание в определенный возрастной период зависит от условий жизни ребенка, характерных для него видов деятельности, форм общения с окружающими и, что особенно важно, от форм обучения. Особенностью обучающихся 10–12 лет является сосуществование всех трех типов мышления при ведущей роли образного мышления.

Именно в возрасте 10–12 лет особое значение приобретает отмечаемая психологами интеллектуализация процессов восприятия и восприимчивость к усвоению проективных отношений.

Каждый учитель математики знает, как важно уметь «видеть» чертеж, «читать» его, от этого зависит качество усвоения геометрического содержания. Недостаточно просто запомнить и воспроизвести то, что лежит на поверхности, надо увидеть содержащиеся в чертеже связи и зависимости, а это значит, наполнить восприятие чертежа размышлениями. Однако данные многих исследований показывают, что учащиеся этого возраста часто не умеют всесторонне рассмотреть геометрический объект – смотрят, но не видят. Отсутствие прочных навыков восприятия задерживает развитие мышления. Более того, в процессе обучения учитель, как правило, спешит дать вербальное определение геометрического понятия без тщательной подготовки процесса его осознания, включающего восприятие.

Не только само восприятие, но и другие психические процессы можно поднять на более высокий уровень через усвоение обучающимися системы сенсорных эталонов. Помимо собственно геометрических фигур (линия, круг, треугольник, куб и пр.) эталонами выступают геометрические конфигурации (параллельные прямые, пересекающиеся прямые, пересекающиеся окружности и пр.) и величины (единицы длины, площади, объема, градусной меры угла). Именно они помогают ориентироваться в мире геометрических объектов. Сопоставляя характеристики воспринимаемых предметов с уже усвоенными эталонами, ребенок познает свойства этих предметов, его восприятие приобретает целенаправленность и организованность.

Изучение наглядной геометрии в 5–6-х классах важно еще и потому, что в возрасте 11–12 лет у детей в основном уже завершается формирование сенсорных эталонов, поэтому так важно поддержать этот процесс в части эталонов, связанных с геометрическими фигурами и измерением геометрических величин. К сожалению, педагоги подчас игнорируют тот факт, что без развития геометрического восприятия формировать мышление невозможно. Это одно из главных противоречий, мешающих развитию геометрического образования.

Восприимчивость к усвоению проективных отношений проявляется в том, что дети этого возраста под влиянием различных видов деятельности обладают значительными возможностями в использовании разных систем отсчета: они могут переходить от системы отсчета, связанной с собственным телом, к другим, мысленно менять позицию наблюдения. Это хорошо видно на примере такого вида деятельности, как рисование. Спонтанное повышение графической культуры ребенка в плане создания образов и оперирования ими способствует формированию геометрических образов, следовательно, должно использоваться в практике математического образования, раскрывая потенциальные возможности ребенка.

2.5.3. Методические особенности обучения наглядной геометрии

Методика обучения наглядной геометрии строится на нескольких принципах:

- *Принцип многообразия геометрических форм и конфигураций, обеспечивающих широту формируемых представлений и овладение способами действий с геометрическими фигурами*.

Изучение учащимися плоской и пространственной геометрий должно осуществляться параллельно. При таком подходе плоские фигуры должны «выходить в пространство» и рассматриваться как элементы пространственных тел, а пространственные тела «переходить» на плоский лист бумаги в качестве изображений и разверток. Основными способами действий являются: способы графического построения геометрических фигур, приемы их моделирования, навыки практических измерений, действия по визуальному восприятию геометрических объектов, созданию их мысленных образов и оперированию ими.

- *Принцип спиральности – разворачивания содержания курса по спирали.*

На первом, принципиально важном этапе знания формируются на наглядно-интуитивном уровне в ходе предметно-практической деятельности. На последующих этапах правила и алгоритмы построения формируются как обобщенное наглядно-вербальное выражение способов действий, уже освоенных на интуитивном уровне. Характерной особенностью при таком подходе является системность знаний, т. е. наличие в сознании ученика связей между отдельно изучаемыми объектами вне зависимости от той последовательности, в которой они изучаются. В соответствии с этим принципом, необходимо включать вновь изучаемый объект в различные связи с уже известными объектами, возвращаться к рассмотрению этого объекта на более высоком уровне знания и расширять знания о нем за счет привлечения новой информации.

- *Принцип фигуративности – построения процесса изучения геометрического объекта на основе образного восприятия.*

Адекватное восприятие вербального определения обучающимися 10–12 лет в силу несформированности необходимого уровня словесно-логического мышления еще недоступно, а, значит, формирование понятия с помощью определения бесперспективно. Поэтому изучение геометрического объекта должно строиться на основе приоритета образа, а не слова. Прежде всего нужно создать образ изучаемого объекта. Создание образа новой фигуры или конфигурации должно опираться на практические действия по ее графическому построению или предметному моделированию, а также базироваться на имеющееся у учащихся интуитивное зрительное представление, сложившееся в результате предыдущего обучения или вытекающее из жизненного опыта. Созданный образ, а также описание фигуры, к которому учащиеся приходят через практические действия, должен закрепиться соответствующим термином, также на создание зрительного образа «работает» разъяснение происхождения термина.

- *Принцип динамичности – развития процесса изучения от геометрии «формы» к геометрии «измерений».*

Измерение геометрической фигуры должно предваряться работой, направленной на всестороннее ее изучение и осознание учащимися проблемы ее измерения, возможности или невозможности применения уже изученных способов. Таким образом, обучение геометрии будет идти от геометрии «формы» к геометрии «измерений», что соответствует установленной психологами закономерности развития геометрических операций у детей от качественных к количественным.

- *Принцип комбинаторности – сочетания статического и динамического подходов в изучении геометрических объектов.*

Необходимость усвоения обучающимися различных подходов к описанию рассматриваемых объектов, различных точек зрения на них подчеркивается многими исследователями. Одним из основных свойств предметов окружающего мира является движение. Движение, динамическое развитие ситуации оказывают воздействие на развитие пространственного воображения ребенка. С целью наиболее эффективного развития образного, пространственного мышления учащихся в систему упражнений целесообразно включать задания, содержащие такие геометрические преобразования, как параллельный перенос, поворот, симметрия.

- *Принцип экспериментальности – исследование геометрических объектов базируется на эксперименте как основном методе, наблюдении и анализе результатов.*

При проведении эксперимента учащиеся выполняют реальные физические действия: наложение фигур, перегибание по оси симметрии, поворот вокруг центра симметрии и др. Опираясь на его результаты, рассмотрев и проанализировав различные частные случаи, учащиеся на основе индуктивных рассуждений выдвигают гипотезу, отражающую выявленную закономерность. С этой целью тематическим планированием Примерной рабочей программой предусмотрена организация и проведение практических работ.

Доминирующим методом познания в курсе наглядной геометрии является индукция. Дедукция имеет место в основном как переход в процессе познания от общего к частному и единичному. Например, среди многообразия многоугольников выделяются треугольники. Дедуктивные рассуждения как процесс логического вывода, как способ получения знаний, противопоставляемый непосредственным наблюдениям и эксперименту, может появляться только постепенно и параллельно с ними, проявляться локально. Таким образом, можно реализовать положение, согласно которому развитие ребенка происходит в двух направлениях – и к более конкретному, и к более абстрактному (П. П. Блонский, Н. А. Менчинская и др.), а выбор пути усвоения знаний зависит от возрастных особенностей, целей обучения и от природы самого знания.

Постепенный переход к увеличению элементов дедукции дает учителю возможность, исходя из подготовленности класса, выбрать тот или иной путь изучения геометрического объекта, например, ограничиться физическим экспериментом и решать все задачи с опорой на физическое действие или увеличить долю доказательных, обосновывающих рассуждений. Для ученика такой подход означает возможность восприятия материала на доступном ему уровне, при этом он имеет возможность знакомиться и с другими вариантами решения, лежащими пока в зоне его ближайшего развития.

2.5.4. Формирование умений выполнения основных действий с геометрическими объектами

Изучение геометрических фигур и пространственных отношений основывается на определенных действиях, которыми учащиеся должны овладеть: наблюдение, воображение, измерение, графические действия и конструирование.

Наблюдение

Существует глубокое заблуждение, что наблюдению учить не надо, достаточно лишь сказать «Смотри!», и все необходимое сделают глаза. Почему тогда одни учащиеся легко «считывают» с геометрического чертежа нужную им информацию, а другие смотрят, но ничего не видят? Восприятие, как и мышление, требует внимания к своему развитию. Развитие умения наблюдать происходит в процессе осмысленной деятельности по рассматриванию геометрических объектов, формирования зрительных эталонов, отражающих основные геометрические конфигурации, знакомства с некоторыми специальными приемами, облегчающими восприятие.

Действия наблюдения составляют основное содержание задач, целью которых является:

– создание мысленного образа геометрического объекта;

– распознавание заданных конфигураций или фигур;

– сравнение непосредственно воспринимаемых объектов или групп объектов.

- *Создание мысленного образа геометрического объекта* – ключевой момент для формирования геометрических представлений и изучения свойств геометрических фигур. Происходить оно должно в процессе правильно организованной, разнообразной деятельности по его всестороннему обследованию. Покажем это на следующем примере.

Пример 1. Формирование представления о прямоугольном параллелепипеде.

Может показаться, что эти представления сформированы еще в дошкольном детстве, ведь это одна из самых распространенных геометрических фигур в окружающем мире. Но это не так. Чтобы убедиться в этом, достаточно попросить пятиклассников ответить на вопрос:

«Сколько у куба граней?» А на вопрос о числе ребер ответы будут самые разные, даже если при этом куб будет находиться в руках у каждого ученика. Даже просто пересчитать ребра геометрической фигуры не всем удается!

Чтобы создать образ параллелепипеда, учащимся необходимо осуществить разнообразные практические действия с моделями параллелепипеда, причем под руководством учителя, который руководил бы процессом обследования и направлял его указанием, какие особенности необходимо выделить, называнием их и т. п. Организовать это можно в виде практической работы. Учащимся следует, взяв в руки модель параллелепипеда (это может быть деревянный брусок, спичечный коробок, бумажная модель, склеенная из развертки, и пр.), выполнить следующие действия:

1) провести ладонью по его поверхности и ощутить, что она состоит из плоских частей;

2) рассмотреть отдельные плоские части – грани параллелепипеда, определить их форму;

3) зафиксировав противоположные грани, например пальцами, зрительно установить равенство противоположных граней;

4) зафиксировав каждую грань пальцем (тремя пальцами одной руки и тремя пальцами другой), определить число граней;

5) провести ладонью по поверхности параллелепипеда, выделив линию излома – ребро параллелепипеда; выделить грани, границам которых принадлежит это ребро; выделить и другие ребра, принадлежащие этим же граням; выделить еще несколько ребер параллелепипеда;

6) выделить группы равных ребер параллелепипеда и определить их число; обвести равные ребра карандашом одного цвета;

7) выделить вершины параллелепипеда; поместив его между ладонями, определить особенности расположения вершин;

8) зафиксировав каждую вершину одним пальцем (4 пальца одной руки и 4 пальца другой руки), подсчитать их число;

9) выбрав одну из вершин, определить число ребер, сходящихся в этой вершине; сравнить длины этих ребер (на глаз; проведя по ним пальцем; измерением); проделать это для других вершин; заметить, что в каждой вершине сходятся три ребра разной длины;

10) зафиксировать внимание на гранях, сходящихся в одной вершине: определить их число, размеры.

В чем отличие мысленного образа, созданного в результате такого всестороннего и подробного исследования, от образа, который возникает при обычной наглядной демонстрации? Точно такое же, как между двумя представлениями об автомобиле, одно из которых создается в процессе просмотра фотографии, а другое – тест-драйва. Образ, который создается в результате самостоятельно производимых действий, наполнен знаниями о свойствах объекта.

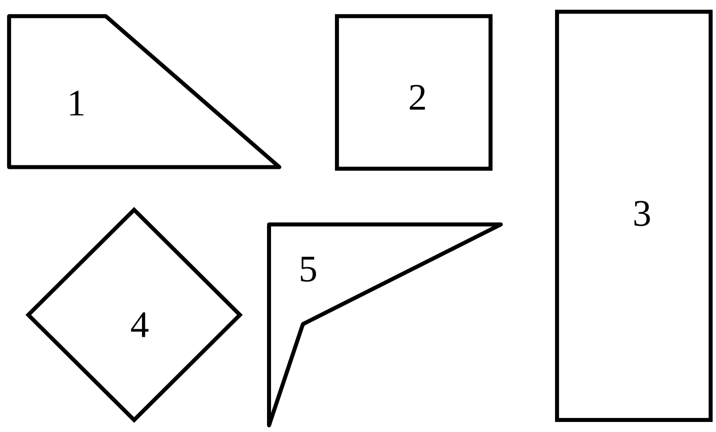
В описанной практической работе используются очень разные действия. И простые тактильные действия, и движения, которые «в ходу» у каждого ребенка с младенчества. Например, движения руки, фиксирующие тот или иной выделяемый в данный момент элемент изучаемого объекта, акцентирующие на нем внимание, при этом способы фиксирования учащиеся могут придумывать сами.

Тактильные действия и движения помогают осуществлять, направлять более сложные действия, сочетающие в себе зрительное сопоставление, сравнение и анализ отдельных элементов, определение их количественных характеристик, синтез этих элементов в единое целое и выделение ключевых особенностей исследуемого объекта. По сути, наблюдение здесь выступает и методом исследования, т. к. предложенный набор действий представляет собой план систематического наблюдения. Дайте учащимся задание провести описанное исследование, а затем попросите рассказать о том, что они знают о параллелепипеде.

▪ Решение задачи *сравнения непосредственно воспринимаемых объектов* требует от учащихся умения подмечать в рассматриваемых объектах общие черты и различия, находить среди них существенные и служит, тем самым, формированию понятий.

▪ Когда ставим перед учащимися задачу *распознавания геометрических объектов*, преследуем две цели: формирование законченного образа объекта изучения, его узнавания и различения в различных пространственных положениях, в более сложных конфигурациях, а также развитие у учащихся геометрической зоркости и наблюдательности.

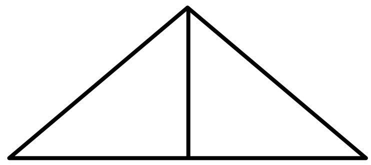
Пример 2. Найдите на рисунке все прямоугольники.



Особенность рисунка заключается в том, что он содержит две фигуры, не являющиеся прямоугольниками, а также два квадрата. Чтобы справиться с этим заданием, учащиеся должны, во-первых, помнить, что квадрат является прямоугольником, а во-вторых, увидеть квадрат, расположенный в непривычном для них положении.

Особенность восприятия геометрических объектов такова, что фигура 4 воспринимается как ромб, если учащиеся знакомы с ромбом, в противном случае – как четырехугольник, не являющийся квадратом. Если учащиеся не выделяют эту фигуру как квадрат, необходимо предложить им мысленно, а в случае затруднения и практически, повернуть ее так, чтобы квадрат принял более привычное для распознавания горизонтально-вертикальное расположение.

Пример 3. Сколько треугольников изображено на рисунке?



Это упражнение направлено на отработку умения распознавать треугольник в более сложной конфигурации, в данном случае и как часть другой фигуры, и как объединение фигур.

Математическое восприятие

Восприятие – когнитивная способность формирования целостного образа какого-либо объекта. Математическое восприятие – процесс формирования целостного образа геометрического объекта, включая представление свойств объекта, выявление групп объектов, выявление количества объектов в небольших группах и математических отношений между объектами. Рассмотрим некоторые приемы, которые помогают математическому восприятию геометрических объектов.

- *Предметное моделирование конфигурации*. Прием можно применить при выполнении упражнения, описанного в примере 3. Для того чтобы учитель мог руководить восприятием учащихся, акцентируя их внимание на том или ином треугольнике, научить их переключать свой взор с «большого» треугольника на «маленькие» треугольники, которые его составляют, педагог может предложить учащимся модель, изготовленную из бумаги. Тренировка восприятия заключается в том, что, складывая два треугольника вместе, учащиеся видят один треугольник, разъединяя их, снова видят два исходных треугольника.

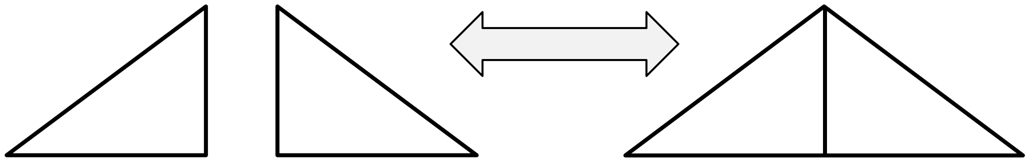


Рис. 17

- *Выделение элементов конфигурации цветом.* Это может быть или раскрашивание фигуры, входящей в конфигурацию, или обведение ее контура. При определенном уровне владения приемом, при его самостоятельном применении некоторые учащиеся при анализе рисунка из примера 3 полностью закрашивают один из треугольников, другие выделяют лишь его контур, третьи – контуры двух треугольников карандашами двух разных цветов. Творческое использование освоенного приема играет существенную роль при решении задач.

Пример 4. Определите, сколько диагоналей у выпуклого пятиугольника.

Пусть из каждой вершины пятиугольника учащиеся проведут карандашом одного цвета две выходящие из нее диагонали. Таким образом, они используют карандаши пяти разных цветов и проведут 10 отрезков.

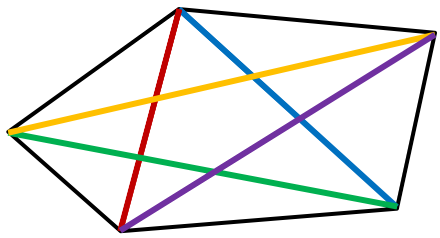


Рис. 18

Далее они обратят внимание на то, что каждая диагональ была проведена ими дважды (отрезки двух разных цветов). Следовательно, у пятиугольника 5 диагоналей. Описанный способ решения позволяет учителю поставить перед учащимися вопрос о количестве диагоналей у шестиугольника, семиугольника, стоугольника.

Найденный способ легко может быть перенесен ими на любой многоугольник: число диагоналей равно половине (каждую диагональ провели дважды) произведения числа вершин (число использованных карандашей) на число диагоналей, выходящих из одной вершины (их на 3 меньше числа вершин). Это пример восприятия, подкрепленного рассуждениями.

- *Использование логики перебора.* Этот прием (наряду с выделением цветом) имеет место, например, при выполнении задания из примера 4. Логика перебора заключается в этом случае в последовательном проведении всех диагоналей, выходящих из каждой вершины пятиугольника.

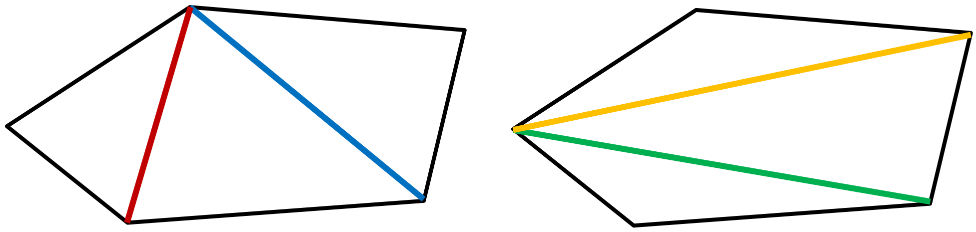


Рис. 19

Воображение

Операции мысленного оперирования образами и создания новых образов относятся к воображению. В рамках изучения наглядной геометрии воссоздающее воображение – это представление новых геометрических объектов в соответствии с их описанием, чертежом, схемой.

Формируется воображение на основе восприятия, поэтому, обогащая опыт восприятии, наблюдения, побуждая учащихся к созданию образов, учитель развивает их воображение. Овладение действиями воображения происходит в процессе перехода практических действий во внутренний план.

Действия воображения являются содержанием задач, целью которых является:

– создание мысленного образа геометрического объекта по его описанию;

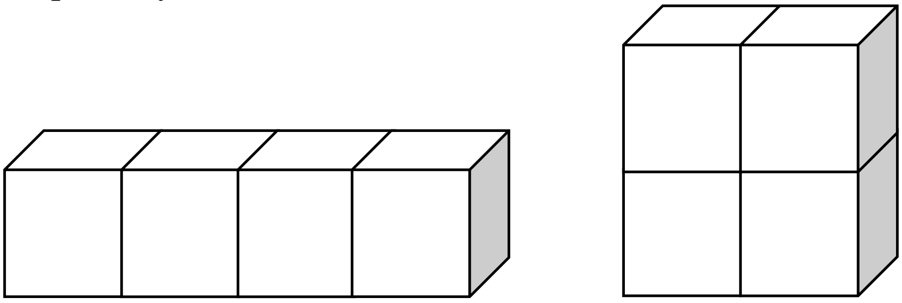
– создание мысленного объемного образа объекта на основе рисунка пространственного тела или проекционного чертежа;

– мысленное оперирование образом.

- Говоря о *создании мысленного образа по его описанию*, будем рассматривать ситуацию, когда в ходе решения задачи учащимся необходимо мысленно сконструировать новый образ из знакомых, как из элементов конструктора.

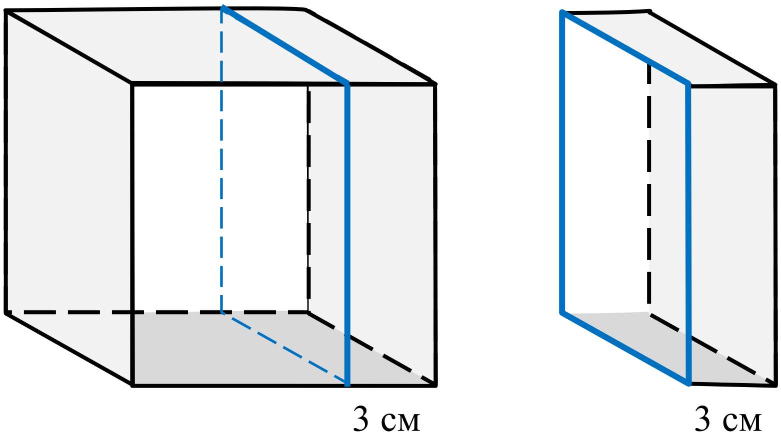
Приведем примеры двух заданий, где в качестве «элементов конструктора» выступают параллелепипеды.

Пример 5. Выложить параллелепипед из 4 кубиков можно двумя способами. Одинаковой ли будет площадь поверхности параллелепипеда в первом и втором случаях?



«Сложить» из четырех кубиков параллелепипед учащиеся должны мысленно, а вот проверить, что таких возможностей только две, в мысленном плане довольно сложно. Сделать это необходимо, прибегнув к кубикам реальным.

Пример 6. Объем параллелепипеда равен 64 см^3, ширина – 4 см, высота – 2 см. Длину этого параллелепипеда уменьшили на 3 см. Определите объем получившегося параллелепипеда.



При решении этой задачи мысленное воспроизведение ситуации позволяет найти более рациональный путь, чем последовательное вычисление длины большого параллелепипеда, уменьшение ее на 3 см и вычисление объема нового параллелепипеда. Во время поиска и обсуждения способов решения задачи учитель предлагает учащимся представить, что заданный в условии параллелепипед разрезают на два параллелепипеда, при этом длина «отрезаемого» параллелепипеда равна 3 см.

Отсюда, чтобы решить задачу, необходимо объем исходного параллелепипеда уменьшить на объем «отрезанной» части.

- Задача *создания мысленного образа пространственного тела на основе графического изображения* решается в первую очередь для пространственных фигур. Прежде чем познакомить учащихся с проекционным чертежом, который используется в стереометрии, в курсе наглядной геометрии изучение пространственных фигур полезно начать с рисунков стеклянных, каркасных моделей, а также сплошных тел, сложенных из кубиков или параллелепипедов, постепенное абстрагируя изображения материальных тел и заменяя их проекционным чертежом.

Материальный объект представить легче. Использование изображения стеклянной модели на начальном этапе овладения действиями по созданию мысленных пространственных образов и терминологией, связанной с многогранниками, позволяет учащимся «увидеть» все элементы многогранника, определить их число, особенности расположения, форму граней. На стеклянной модели видны и ребра, и грани. Изображение каркасной модели имеет более абстрактный характер, поэтому его использование носит переходный характер от изображения стеклянной модели к проекционному чертежу. На каркасной модели видны ребра, а грани как бы прозрачны, реально невидимы.

Проекционный чертеж – это уже условное изображение, которое надо уметь читать. Учитель фиксирует внимание учащихся на том, что у видимой грани все ребра являются также видимыми. Учащиеся последовательно выделяют контуры, ограниченные сплошными («видимыми») линиями. Перед их взорами появляется куб с тремя видимыми гранями разного цвета.

- Наиболее сложными для учащихся являются *операции по преобразованию исходного образа*, в котором он претерпевает изменения не только в плане пространственного расположения, но и изменения структурного характера. Примером такого действия является мысленное сворачивание куба из развертки. Начинать выполнять задания, связанные с развертками, надо с изготовления учащимися развертки из листа бумаги. Надо предложить им зафиксировать одну из граней куба как нижнюю и не спеша сворачивать развертку, обращая внимание на расположение граней: какой из квадратов развертки образует верхнюю грань, какие – боковые. Затем надо повторить выполненные действия снова, но теперь фиксировать внимание на том, какие при этом совмещаются точки и какие отрезки.

Сворачивая куб из разных разверток, учащиеся приходят к некоторому приему мысленного сворачивания куба, который заключается в том, что четыре расположенных в ряд квадрата удобно представить в качестве его боковых граней.

При овладении действиями воображения, как и при овладении действиями наблюдения, существенную помощь оказывают описанные выше приемы использования предметной модели и выделения цветом, облегчающие восприятие.

Графические действия

Графические действия представляют собой операции по созданию графических изображений геометрических объектов. Различаются они по использованию чертежных инструментов, по способу их задания, по использованию клетчатой или нелинованной бумаги. Графические действия составляют основное содержание задач, целью которых является:

– выполнение схематического рисунка, изображения от руки;

– воспроизведение заданного изображения;

– построение изображения с помощью инструментов по алгоритму;

– построение изображения с помощью инструментов по описанию.

- *Выполнение схематического рисунка.* Построить схематический рисунок к задаче, качественно отобразив в нем основные конструктивные особенности конфигурации, зафиксировать в графической форме мысленно созданный образ – важное умение, необходимое при решении геометрической задачи. Но для этого учащиеся должны научиться выполнять изображения от руки. При этом учащиеся 5–6-х классов уже способны не просто копировать данные им изображения, а выполнять более сложные действия, например, преобразовать рисунок в проекционное изображение или перенести на бумагу созданный мысленный образ.

- *Построения с помощью инструментов по заданному алгоритму* делятся на построения, выполняемые с использованием любых чертежных инструментов, и классические построения, выполняемые с помощью циркуля и линейки без делений.

Попросите пятиклассников рассказать, как построить квадрат, и вы увидите, что не у всех из них есть представления о действиях, подлежащих выполнению. Попросите начертить прямоугольник на нелинованной бумаге. Все ли учащиеся справятся с этим заданием?

Одна из причин затруднений кроется в том, что у учащихся нет четкого представления о той последовательности действий, которая должна привести к желаемому результату. Это и не мудрено, поскольку эти действия, как правило, не фиксируются, ведь на рисунке им предлагается конечный результат, который на самом деле возникает постепенно, за несколько шагов. Опытный учитель, выполняя построения на доске, все необходимые шаги, конечно, фиксирует, а ученик, возможно, и повторит их у себя в тетради. Однако запомнит ли? Сможет ли воспроизвести дома? Помочь учащимся выстроить алгоритм может последовательность рисунков стоп-кадров: изображений, последовательно фиксирующих отдельные, наиболее характерные моменты построения конфигурации. Здесь необычайно важно, что рисунки дают учащимся возможность контролировать в ходе работы правильность выполняемых ими действий. Последовательность рисунков должна быть подкреплена вербальным описанием производимых действий, зафиксированных рисунками.

Выполнение классических геометрических построений, выполняемых с помощью циркуля и линейки без делений, более характерно для курса планиметрии, т. к. вряд ли их можно отнести к естественным, все они основаны на логически обоснованных геометрических фактах. Кроме того, и саму идею введения весьма искусственного ограничения на пользование лишь двумя названными инструментами учащиеся воспринять пока не могут.

В 5–6-х классах полезна как раз противоположная постановка вопроса – задействовать разные инструменты, придумывать разные алгоритмы и способы построения, активно используя полученные знания о свойствах фигур и развивая фантазию. При этом основой для многих построений, выполняемых циркулем и линейкой, служит конфигурация, образуемая двумя пересекающимися окружностями: построения треугольника по трем сторонам; серединного перпендикуляра к отрезку; точки, симметричной данной относительно прямой.

- Задачу *воспроизведения заданного изображения* полезно решать как на клетчатой, так и на нелинованной бумаге. Данная задача требует от обучающихся самостоятельного создания алгоритма построения заданной конфигурации на основе ее анализа. Клетчатая бумага, обладая мерной сеткой, параллельностью и перпендикулярностью линий, ее образующих, служит основой для определения особенностей конфигурации, подходов к ее воспроизведению, задает числовые характеристики составляющих элементов. Нелинованная бумага не содержит таких явных подсказок и требует более внимательного изучения заданного рисунка.

Выполняя копирование фигур, изображенных на клетчатой бумаге, учащиеся должны научиться «ходить» от узла к узлу по линиям сетки, отсчитывая от начальной точки конкретное число клеток вправо (влево) и определенное количество клеток вверх (вниз). Освоенный прием может использоваться в дальнейшем при воспроизведении различных фигур, а также использоваться учителем, например чтобы «продиктовать» классу необходимый для дальнейшей работы треугольник.

- Наибольшие трудности среди всех задач на построение представляет *построение изображения по описанию*, так как это предполагает создание сначала зрительного образа на основе вербального описания, а затем способа его построения.

Конструирование

Конструирование в геометрии – это создание предметных моделей геометрических объектов. Эти действия естественным образом реализуются через задачи на:

– пространственное моделирование;

– построение фигуры с помощью перегибания листа бумаги;

– разрезание и складывание.

- *Перегибание листа бумаги* является для учащихся операцией, знакомой по выполнению различных поделок из бумаги. Однако, повторяя за учителем последовательность требуемых от него действий, учащийся не осознает их геометрической сущности. Полезно предлагать учащимся решить геометрическую задачу путем перегибания, привлекая имеющиеся геометрические знания, например построить две параллельные прямые или квадрат.

- *Пространственное моделирование* выполняет часто вспомогательную функцию изготовления моделей пространственных тел, необходимых в процессе изучения их свойств. Например, для изучения свойств симметрии в пространстве каждому учащемуся необходимо вылепить из пластилина модели шара, цилиндра, куба. Эти модели помогают при изучении сечений пространственных тел. При изучении развертки куба и для овладения навыками оперирования мысленными образами учащиеся должны иметь несколько фигур, из которых свернуть куб можно и из которых куб свернуть нельзя. Они изготавливают их самостоятельно по данным им разверткам и рисункам. Помимо этого учащиеся решают и собственно конструктивные задачи, где им нужно, опираясь на мысленный образ моделируемого тела, выделить особенности конструкции, задать самостоятельно или определить его размеры, изготовить развертку, например изготовить из картона куб объемом 1 дм^3 или модель треугольной пирамиды из трубочек для коктейля (соединить трубочки можно, продев внутрь нить или тонкую проволоку).

- *Разрезание и складывание фигур* служит развитию и углублению представлений о геометрических фигурах, обнаружению существующих между ними связей. Так, квадрат можно разрезать на два равных прямоугольника (по оси симметрии, перпендикулярной сторонам квадрата), на два равных прямоугольных равнобедренных треугольника (по одной диагонали), на четыре равных квадрата и т. п.

Пример 7. Возьмите квадрат и разрежьте его по диагоналям. Сложите из получившихся фигур прямоугольник.

Ценность полученных навыков заключается в том, что в дальнейшем разрезание и достраивание используется в качестве приема: на основе действий по перекраиванию можно находить площадь треугольника; составление паркетов из равных треугольников позволяет «увидеть», что сумма углов треугольника равна 180° и пр.

Пример 8. Вырежьте из листа бумаги треугольник и перекроите его в прямоугольник. Чему равна площадь треугольника?

Полезно использовать в учебных целях хорошо известную игру-головоломку «Танграм».

Действия измерения

Действия измерения состоят из операций по измерению геометрических величин и усвоению эталонов длины, площади, объема и градусной меры угла. Используются они в ходе упражнений, требующих:

– выполнения измерений с помощью инструментов;

– выбора и преобразования единиц измерения;

– измерения величины на глаз;

– сопоставления величин непосредственно воспринимаемых объектов;

– выполнения вычислений геометрических величин.

▪ Овладение *практическими измерениями* включает в себя осознание самого процесса измерения, знание устройства используемого измерительного инструмента, его шкалы, умение им пользоваться. Измерение длины отрезка знакомо учащимся из начальной школы, поэтому здесь необходимо, во-первых, уточнить, насколько осознанно учащиеся его выполняют, во-вторых, расширить круг применения, например, для измерения длины ломаной, произвольной кривой, расстояния между двумя точками, от точки до прямой, между двумя параллельными прямыми. Можно поговорить и об измерении расстояния от точки до фигуры. Ну и, конечно, полезны практические измерения, которые можно выполнять в классе: попросите учащихся измерить длину и ширину стола, высоту стула, размеры двери, найти расстояние между двумя столами, ширину прохода между рядами и пр. Аналогичные задания можно выполнить и при изучении площади. Все это естественным образом подходит для организации практических работ, для использования групповых форм работы, которые так нравятся учащимся.

Пример 9. По рисунку определите длину отрезка AB.

При выполнении этого задания учащиеся должны выявить и сформулировать проблему, найти путь выхода из проблемной ситуации, которая выражается в том, что требуется найти длину отрезка, начало которого не совпадет с началом отсчета. Успешное выполнение этого и аналогичных заданий отражает способность найти выход из нестандартной ситуации, говорит о понимании сути процесса измерения.

В отличие от измерения длины отрезка, измерение величины угла – новый вид измерений. Помочь учащимся им овладеть призваны задания, которые выполняются на изображениях транспортира.

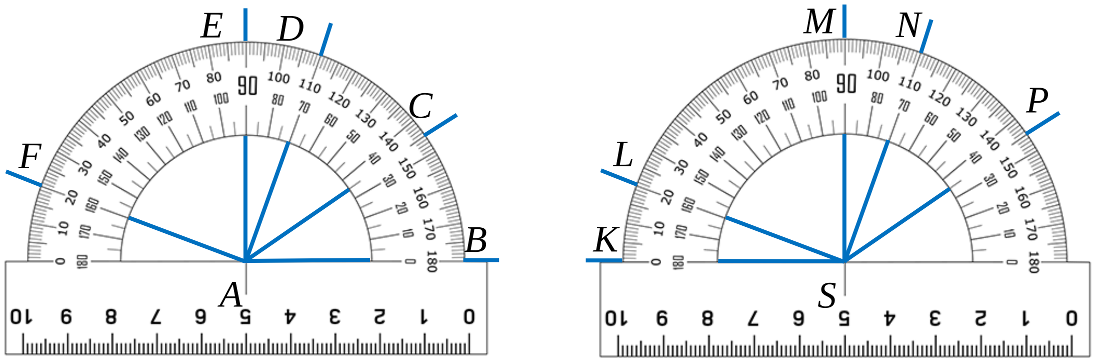


Рис. 20

В них учащимся не надо для измерения угла прикладывать транспортир, это уже изображено на рисунке. Необходимо выполнить только ту часть действий, которая включает определение величины угла по шкале. При этом они привыкают к правильному расположению транспортира, их внимание фиксируется на том, какой шкалой удобно пользоваться.

Первые построения угла заданной градусной меры также полезно осуществлять на рисунках, где дано изображение транспортира и проведена одна из сторон угла.

Целесообразно использовать в качестве измерительного инструмента и циркуль – для откладывания равных отрезков или нахождения ближайшей точки прямой.

- Овладение практическими измерениями невозможно без знания *единиц измерения*. Решение любой практической задачи включает выбор единиц измерения или преобразование заданных. Достаточно, чтобы учащиеся хорошо знали соотношения между линейными метрическими величинами и на их основе осуществляли преобразование единиц площади и объема.

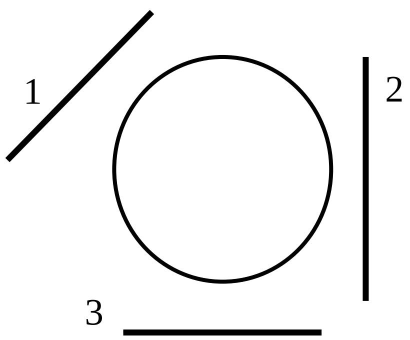
Пример 10. В каких единицах измеряют: а) расстояние от дома до школы; б) длину отреза ткани при покупке; в) расстояние между городами; г) площадь квартиры?

Пример 11. Какие измерения надо провести, чтобы определить, какую примерно площадь занимает территория вашей школы? Сравните эти площади с 1 соткой и 1 гектаром.

Научиться осознанно, неформально преобразовывать единицы измерения можно только тогда, когда эти преобразования сначала выполнены практически. Можно предложить учащимся начертить квадрат со стороной 1 дм и определить его площадь в квадратных дециметрах; затем разбить его на квадраты со стороной 1 см и подсчитать число квадратов. Они получат, что площадь квадрата равна 1 дм^2 или 100 см^2. Отсюда и следует зависимость между квадратным дециметром и квадратным сантиметром. Осознанные действия постепенно переходят во внутренний план, но в памяти остаются и могут быть повторены при необходимости.

- Однако нельзя научиться *оценивать геометрические величины на глаз*, если не было опыта сопоставления величин воспринимаемых объектов.

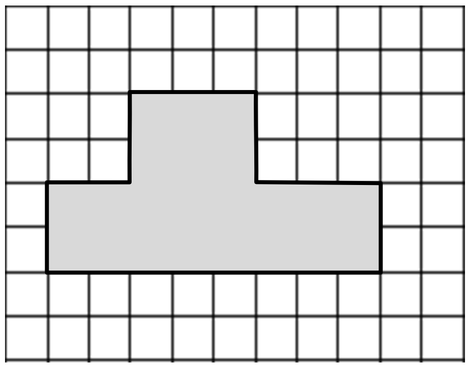
Пример 12. Назовите отрезки в порядке возрастания их длин. Какие из этих отрезков можно закрыть кругом?



▪ При решении задач на *вычисление геометрических величин* выделяются три аспекта: знание понятия, владение формальными правилами вычисления и применение свойства аддитивности математических величин, состоящее в том, что значение величины, присущее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям.

С понятием площади учащиеся уже знакомы. Новым понятием для учащихся 5–6-х классов является понятие объема. Целесообразно первоначально геометрические величины находить в абстрактных единицах – ввести понятия единицы длины, квадратной единицы, кубической единицы. Фигуры разбиваются на квадраты, площади которых приняты за 1 кв. ед., а уже затем осуществляется переход к метрическим единицам.

Пример 13. Нарисуйте фигуру той же площади, что и фигура, изображённая на рисунке.



Необходимо учитывать, что неоправданно быстрый переход к формальному правилу (вычисление площади прямоугольника, объема параллелепипеда) приводит часто к его отрыву от усвоенного понятия и затрудняет практическое применение. Этот переходный этап должен быть обеспечен адекватным содержанием.

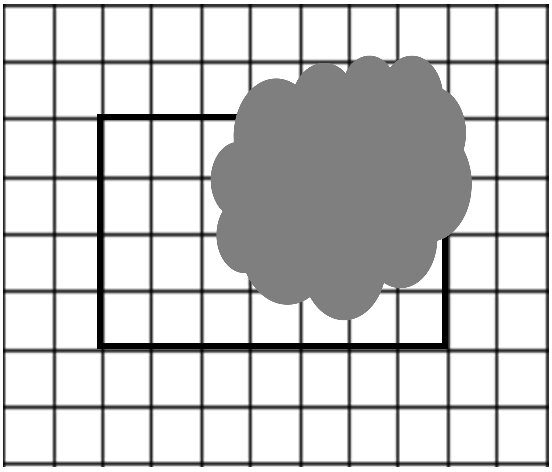
Например, такими заданиями:

Пример 14. Начертите в тетради прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Разбейте прямоугольник на квадраты со стороной 1 см и определите его площадь.

Учитель предлагает учащимся закрасить один из квадратов площадью 1 см^2. Важно, чтобы учащиеся считали квадраты сначала одного ряда, а затем считали число рядов. Учитель еще раз обращает внимание учащихся на то, что число квадратов в ряду равно числовому значению длины одной стороны прямоугольника, а число рядов – другой стороны. И здесь не приходится рассчитывать на то, что понятие площади и умение вычислять площадь прямоугольника уже сформированы в начальной школе. Это объективно трудный материал.

Полезно использовать ситуации затруднения, проблемные.

Пример 15. Определите площадь прямоугольника, залитого краской.



При выполнении этого упражнения учащиеся не могут просто пересчитать квадраты, так как часть из них не видна. Таким образом, им необходимо вычислить количество квадратов с помощью умножения.

Пример 16. Постройте на нелинованной бумаге прямоугольник, выполните необходимые измерения и вычислите его площадь.

Вряд ли длины сторон построенного прямоугольника будут выражаться «хорошими» – круглыми – числами, удобными для выполнения вычислений. Скорее всего, в результате выполненных измерений учащиеся получат что-то вроде 5 см 3 мм, значит, им придется выражать длины сторон в миллиметрах, а затем находить произведение двузначных чисел.

Пример 17. По известным данным прямоугольника, представленным в таблице, найдите недостающие.

	Длина	*Ширина*	*Площадь*	*Периметр*
1	5 см	3 см	*** см^2	***см
2	8 мм	*** мм	40 мм^2	*** мм
3	10 м	***	***	40 м

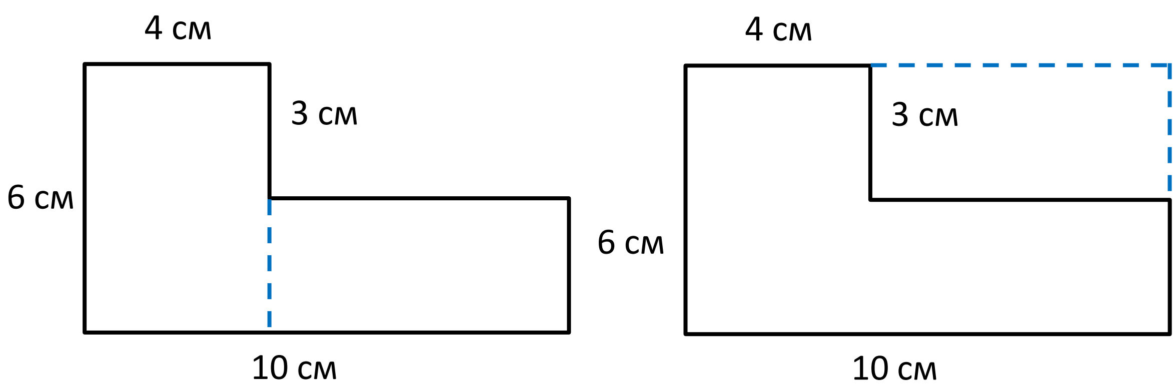
После того как правило усвоено, полезно решать не только прямые задачи, но и обратные – по заданной площади и стороне прямоугольника находить другую его сторону. А также одновременно находить периметр и площадь, – известно, что обучающиеся часто путают эти понятия.

Важный понятийный вопрос – свойство аддитивности площади (объема) – хотя в явном виде и не обсуждается, но широко используется:

а) при вычислении величин фигур, составленных из прямоугольников;

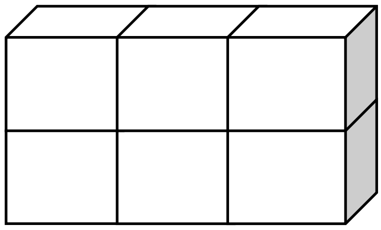
б) при вычислении величин тел, составленных из параллелепипедов.

Пример 18. Определите площадь фигуры.



При решении этой задачи целесообразно подвести учащихся к осознанию двух способов решения: первый – путем разрезания исходной фигуры на два прямоугольника, второй – путем ее достраивания до прямоугольника.

Пример 19. Из кубиков с ребром 2 см сложили параллелепипед. Чему равен его объём?



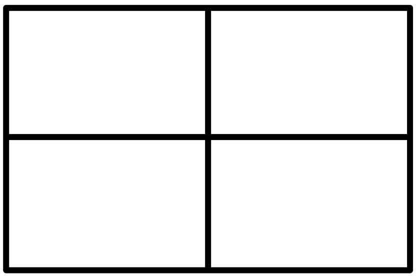
При решении этой и аналогичных задач следует обсудить два решения: 1) определяются измерения параллелепипеда и применяется правило вычисления объема параллелепипеда; 2) вычисляется объем одного куба, подсчитывается число кубов и применяется свойство аддитивности.

Завершая разговор о действиях, составляющих геометрическую деятельность, следует сказать о том, что отнесение той или иной задачи к определенной группе является достаточно условным. Понятно, что ее выполнение только в редких случаях основано, например, только на действиях восприятия, чаще оно требует совместной работы восприятия, воображения и мышления и, соответственно, выполнения различных действий.

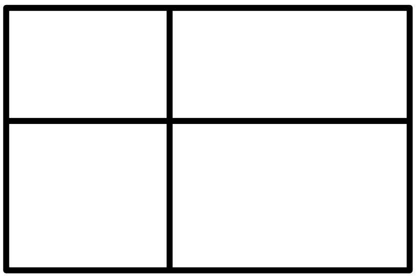
Мы уже приводили примеры таких заданий, рассмотрим еще одно.

Пример 20. Сколько прямоугольников на рисунке?

а)



б)



Успешному выполнению этого задания способствуют:

а) метод упорядоченного перебора, сводящийся в данном случае к последовательному перебору всех прямоугольников, состоящих из «маленьких» прямоугольников и их комбинаций;

б) воображение, позволяющее создать необходимые образы и доказать отсутствие прямоугольников, сложенных из трех маленьких прямоугольников;

в) процесс восприятия, дающий возможность на основе образов, созданных воображением, выделить из данной конфигурации все прямоугольники, составленные из 1, 2 и 4 «маленьких» прямоугольников.

2.5.5. Организация формирования логического и пространственного мышления при изучении наглядной геометрии

К основным результатам обучения математике в основной школе также относятся способность к рассуждению и умение пользоваться методами доказательств и построения цепочки логически верных утверждений.

Умения верно и строго рассуждать, выдвигать гипотезы, доказывать отношения и утверждения необходимы не только при решении математических задач, но и в естественных науках, например физике и химии. Без верных рассуждений не выполнишь анализ литературного произведения, не напишешь сочинение или эссе по русскому языку, истории или обществознанию. Математические понятия, например, корректная и некорректная задачи, методы решения некорректных задач, правильная игра используются в информатике. Также математика – отражение природы во всех ее аспектах, так как в природе нет области, которую нельзя было бы изучать и моделировать, используя математические средства. Кроме этого, умение рассуждать требуется во многих реальных жизненных ситуациях, начиная с убеждения собеседников, покупок в магазине и заканчивая решением сложных технических и бизнес-задач.

Несмотря на большую потребность сформированности логики, включающей способность к рассуждению, умение пользоваться методами доказательств, умение построения цепочки логически верных утверждений, люди в реальной жизни часто совершают логические ошибки. В практике обучения математике, особенно при традиционном подходе к организации обучения, учащиеся часто встречаются впервые со строгой логикой доказательства только в курсе геометрии 7-го класса. При этом формирование умений логически мыслить происходит параллельно с изучением нового материала, для восприятия которого в 5–6-х классах база нередко на достаточном уровне не сформирована. Поэтому наряду с формированием умений выполнения основных действий с геометрическими объектами при изучении наглядной геометрии в 5–6-х классах должно формироваться логическое и пространственное мышление.

Встает вопрос: «Как организовать процесс изучения геометрии в 5-м классе, способствующий развитию логики и пространственного мышления?»

С первых уроков по теме «Наглядная геометрия» в 5-м классе необходимо организовать процесс обучения так, чтобы при изучении материала, выполнении заданий у учащихся формировались умения логического и пространственного мышления, чтобы происходило знакомство с интересным материалом, мотивирующим на дальнейшее изучение геометрии, в том числе углубленного уровня, начиная с 7-го класса. Например, при изучении наглядной геометрии в 5-м классе на уроках можно провести проектно-исследовательскую работу по обобщенной теме «Пространство и форма», ориентированную на развитие логики и пространственного мышления. Работа включает цикл экспериментов, квесты и кейсы, которые проводятся систематично в течение изучения темы. Непосредственное проведение работы базируется на деятельностном подходе.

Пример организации проектно-исследовательской работы «Пространство и форма»

В начале работы учитель организует исследование, направленное на формирование понимания существования многообразия геометрических форм, восприятия разных форм, пространственного представления фигур и первоначальных умений построения логической цепочки утверждений. Учащиеся сравнивают формы предметов окружающего мира и осуществляют поиск аналогичных форм геометрических фигур, например, цилиндра, шара, пирамиды.

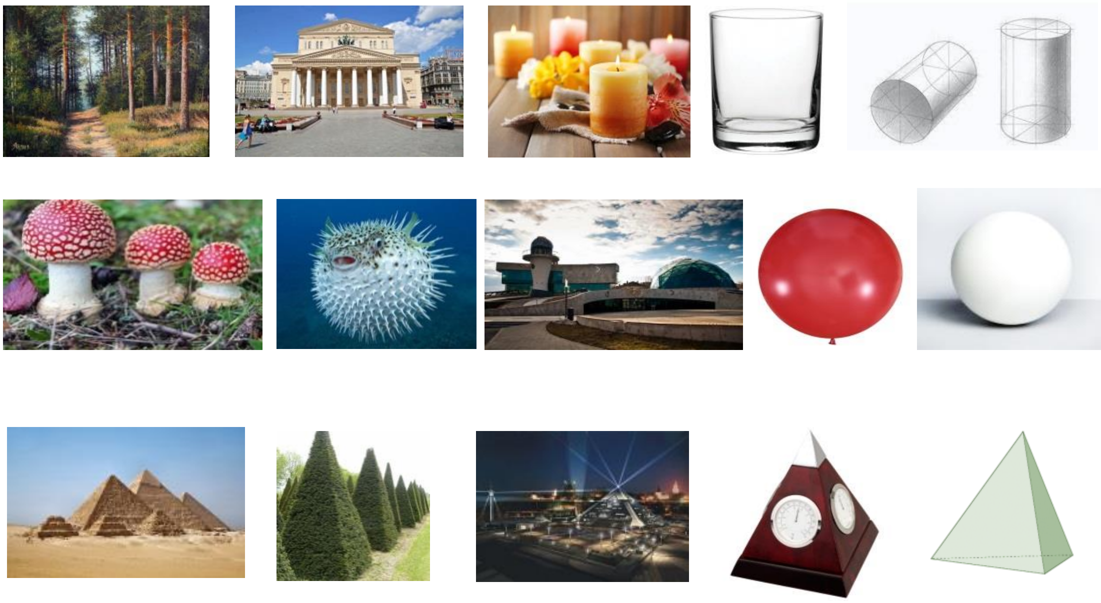


Рис. 21

Учащиеся под руководством учителя описывают процесс сравнения объектов через построение логических утверждений. В процессе сравнения и анализа перед ними открывается аналогия и взаимосвязь форм природных и рукотворных объектов, геометрических фигур. Затем они обобщают понятия и на своем уровне изучения выявляют ограничения и возможность их деления на группы. Выбирая признак деления на группы, составляют классификационные схемы, например возможность деления пирамид на группы в зависимости от количества вершин фигуры, являющейся основанием.

При изучении темы «*Измерение длины отрезка, метрические единицы измерения длины*» формирование логического мышления происходит параллельно с формированием умений выполнения работы с единицами измерения. Мотивацию учащихся и активизацию их работы учитель организует через знакомство учащихся с измерительными приборами, которые им не знакомы, например, астролябию, малку, рейсшину, штангенциркуль, микрометр. Учитель, используя исторический материал об этих измерительных приборах, знакомит учащихся с их использованием в практической деятельности, например астролябия в разные века использовалась как часы, дальномер, навигатор, счетная машина, справочник координат, атлас тригонометрических функций. С помощью штангенциркуля выполняют высокоточные измерения наружных и внутренних линейных размеров, а также глубин отверстий. Штангенциркуль –

один из самых распространенных приборов измерения благодаря простой конструкции, удобству в обращении и быстроте в работе.

Затем учитель организует проведение эксперимента, результатом которого является модель пространства. В процессе эксперимента учащиеся вспоминают взаимосвязь форм различных объектов, сравнивают рассмотренные инструменты с измерительными инструментами длины отрезков, которые используются в курсе математики, выявляют удобство их использования. Далее учитель предлагает учащимся попытаться измерить точку, отрезок, квадрат и куб.

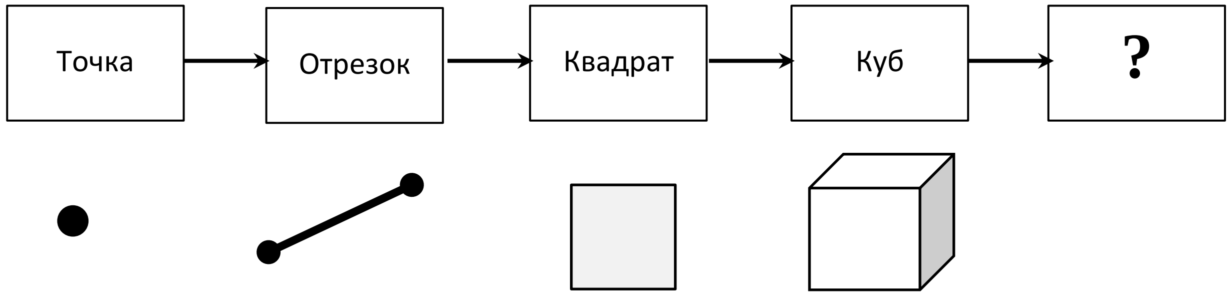


Рис. 22

Учащиеся под руководством учителя выдвигают гипотезу, что геометрические фигуры могут иметь или не иметь измерения. Затем они последовательно производят измерения точки, отрезка, квадрата и куба и строят модель пространства, тем самым практически подтверждая выдвинутую гипотезу о наличии измерений у фигур.

Модель пространства

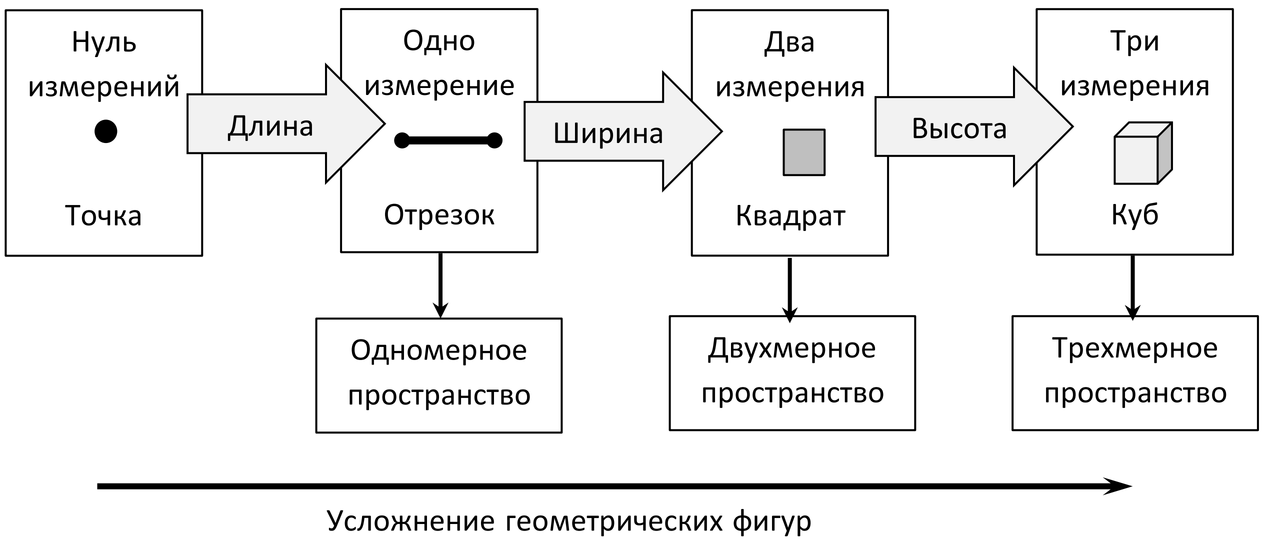


Рис. 23

Проанализировав получившуюся модель, учащиеся формулируют вывод, что усложнение геометрических фигур происходит одновременно с увеличением числа измерений.

На последующих уроках учитель может продолжить проектно-исследовательскую работу, используя, например, квест или кейс-технологию. Поэтому с целью формирования и развития умений логического и пространственного мышления конструируется система заданий, во-первых, объединенных общей темой «Пространство и форма», во-вторых, ориентированных на использование пространственного мышления и построение логически верной цепочки утверждений при выполнении заданий, в-третьих, ориентированных на математические и реальные жизненные ситуации, в которых могут оказаться школьники.

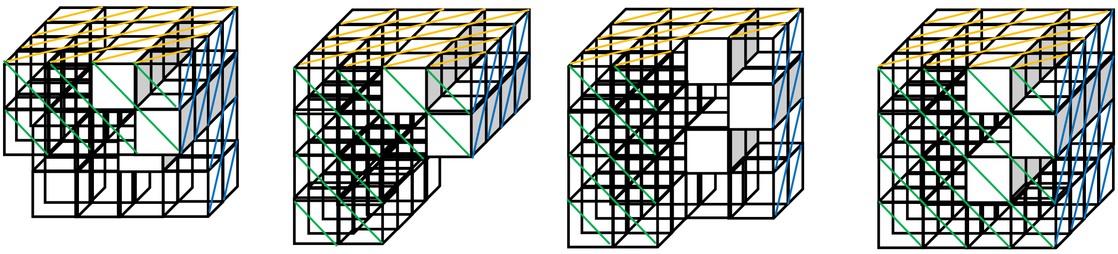
Рассмотрим примеры сконструированных заданий, каждое из которых имеет свои методические и характеристические особенности.

Задание «Кубик Рубика».

Три брата собрались провести между собой соревнование по собиранию кубика Рубика, но не смогли, так как их младшая сестренка у каждого кубика вынула некоторые детали. Мальчики решили отремонтировать кубики, подобрав детали к оставшимся частям. У них не получилось это сделать, так как каждый из них брал детали наугад. Помоги мальчикам определить, каких деталей не хватает у каждого кубика, изображенных ими на рисунках.

Задание «Кубик Рубика» направлено не только на выполнение учащимися действий логического мышления: анализ объектов, выведение следствий из условия, выдвижение гипотез и построение цепочки логических рассуждений, но также и на формирование математического восприятия и пространственного мышления, что включает мысленное восприятие формы куба, формирование целостного образа геометрического объекта, достраивание представленных фигур до целого куба. Кроме этого, задача связана с реальной жизненной ситуацией, в которой через требование учащиеся становятся не просто участниками ситуации, а являются помощниками при выполнении коллективной деятельности с героями ситуации, что способствует формированию функциональной математической грамотности, умению сопереживать другим и оказывать помощь.

Учитель в начале выполнения этого задания организует фронтальное обсуждение геометрических форм оставшихся частей, руководит деятельностью учащихся в процессе анализа и сравнения этих форм, их достраивания до целого куба.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 24

Действия обучающихся. Школьники в процессе фронтального обсуждения, организованного учителем, анализируют оставшиеся части кубиков, изображенные на рисунке, и выявляют, что на рисунке представлены части кубиков размером 4 на 4, конструируют целостный образ геометрического объекта – куб – модели собранного кубика. Затем сравнивают оставшиеся части с моделью целого кубика и выявляют, каких деталей не хватает.

Под руководством учителя учащиеся фиксируют свои рассуждения, строя цепочку логических утверждений. Каждое утверждение соответствует структуре: условие, вывод, обоснование.

Так как ……………, то ………. (……….)

В зависимости от уровня сформированности умения записывания логической цепочки рассуждений учащиеся или записывают ее самостоятельно, а потом сравнивают с образцом, или работают с эталонами записи утверждений.

Отметим, что при выполнении этого задания учащиеся записывают рассуждения в словесной форме, т. е. не используя символьную запись.

Пример рассуждений учащихся:

1) Так как на рисунках *а* и *б* верхняя грань без повреждений, то размер целого кубика 4×4.

2) Так как целый кубик размером 4×4 (пункт 1), то сконструируем модель кубика без повреждений, расположив его цветные грани соответственно цветам оставшихся частей (рисунок *г*).

3) Так как на рисунках *а* и *б* повреждены передняя и боковые грани, а на рисунке *в* – верхняя грань, то недостающие части имеют цвета, соответствующие этим граням кубика.

Параллельно с построением цепочки утверждений учащиеся выполняют практическую деятельность – достраивают части кубиков до целого куба, выполняя построения на бумаге, что способствует формированию умений изображения геометрических объектов на бумаге.

Задание «Бабушкины внуки».

К бабушке на день рождения приехали внуки. Она приготовила для них много вкусных угощений: испекла большой блин и каравай. Бабушка подумала и сказала, что она тремя разрезами разделит блин на столько частей, сколько у неё внуков, а каравай при трёх разрезах разрежется так, что и она будет с ним пить чай. Какое наибольшее количество внуков приехало к бабушке на день рождения?

Задание «Бабушкины внуки», аналогично заданию «Кубик Рубика», связано с жизненной ситуацией, соответствующей социальному опыту пятиклассников. При выполнении этого задания учащиеся встречаются с другими формами реальных объектов и соответствующих им геометрических фигур, что соответствует принципу многообразия форм геометрических объектов. Учитель руководит исследованием, организовывая наблюдение учащихся, и моделированием конфигурации, акцентируя внимание учащихся на целой фигуре или ее частях. Для организации исследования учитель может предложить учащимся бумажные круги – модели большого блина.

Действия обучающихся. В процессе выполнения задания учащиеся абстрагируются от реальной ситуации и работают с геометрическими объектами: кругом и шаровым сегментом, хотя это понятие еще не знакомо им. При фронтальной работе учащиеся сравнивают геометрические объекты и выявляют, что круг является плоской фигурой, а часть шара – объемной.

Затем учитель организует групповую работу. Первая группа учащихся исследует возможные варианты «разрезания» круга на части. Работая с бумажными кругами, они выполняют «разрезание» блина на части, проводя прямые и изменяя их расположение на плоскости, фиксируя положение прямой цветом, или в буквальном смысле, разрезая бумажный круг ножницами (рис. 25, *а–г*).

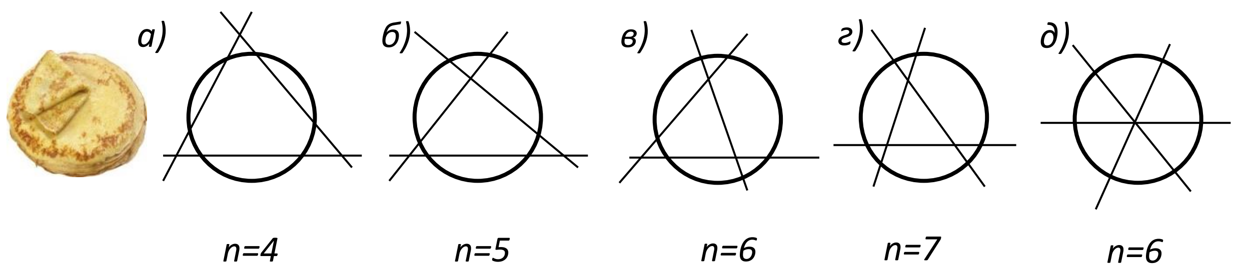


Рис. 25

Вторая группа учащихся мысленно изменяет положение прямых на плоскости или, складывая бумажные круги, анализирует полученные результаты и выдвигает гипотезу, что при разрезании круга все три разреза могут проходить через одну точку (рис. 24*д*), тогда получится 6 частей, как и в варианте *в*. Таким образом, эта группа учащихся находит путь решения, отличный от пути решения первой группы. Далее будет достаточно сместить одну прямую так, что она не будет проходить через точку пересечения двух прямых. Обе группы фиксируют рассуждения и количество получившихся частей.

Затем учитель организует исследование шарового сегмента. Учащиеся выдвигают гипотезу, что с помощью горизонтального разреза получается две части, одну из которых можно рассматривать как аналог круга.

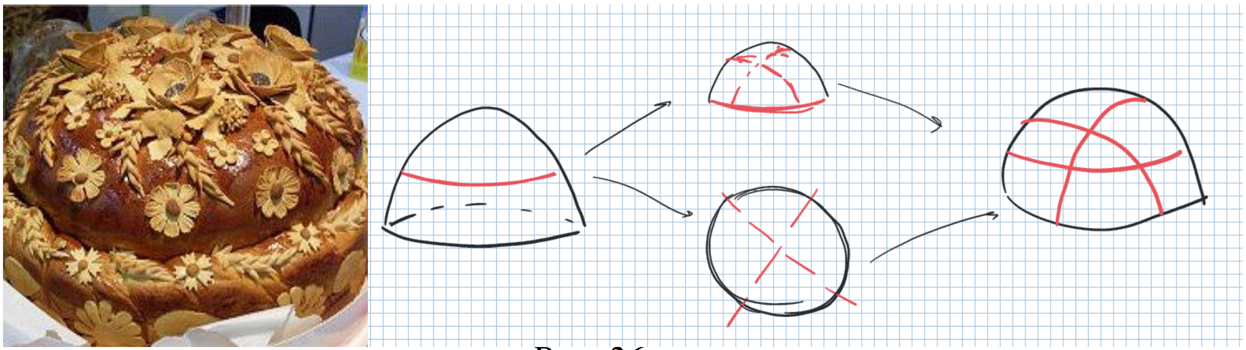


Рис. 26

Учащиеся фиксируют рассуждения и количество получившихся частей, сравнивают результаты и соотносят их с реальной ситуацией, описанной в задаче, и *формулируют вывод*: к бабушке приехало 7 внуков.

После выполнения задания необходимо обратить внимание учащихся на то, что в процессе выполнения задания не только дан ответ на поставленный вопрос, но и подтверждены слова бабушки о трех разрезах блина и каравая, и сделать акцент на том, что гипотезы, выдвинутые в ходе решения задач, требуют подтверждения или опровержения.

Задание «Параллелепипед».

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Известны длины его рёбер: AA_1 = 8 см, AD = 4 см, AB = 6 см.

1) Определите длины всех рёбер этого параллелепипеда.

2) Каковы размеры граней ADD_1A_1, ABB_1A_1, ABCD?

При решении задач, аналогичных заданию «Параллелепипед», учитель организует деятельность учащихся, направленную не только на непосредственное выполнение требований, но и на формирование умений работы с информацией и представления ее в другой форме, например символьной. Учитель создает проблемную ситуацию, ставя перед учащимися учебно-познавательную задачу: составить схему поиска пути решения задачи.

Действия обучающихся. Под руководством учителя учащиеся анализируют текст задачи, выделяя условие и требование, выявляют, что основной геометрической фигурой, о которой идет речь, является параллелепипед. Затем они мысленно воспроизводят образ фигуры и, выполняя графические действия, схематически изображают параллелепипед. После этого учащиеся записывают условие и требование задачи на символьном языке.

Затем учитель организует фронтальную работу учащихся в направлении конкретизации свойств параллелепипеда, выведения следствий из условия и требования задачи. Далее под руководством учителя учащиеся, базируясь на результатах фронтальной работы, выбирают форму представления схемы поиска решения задачи и составляют схему поиска решения задачи.

Схема поиска решения задачи

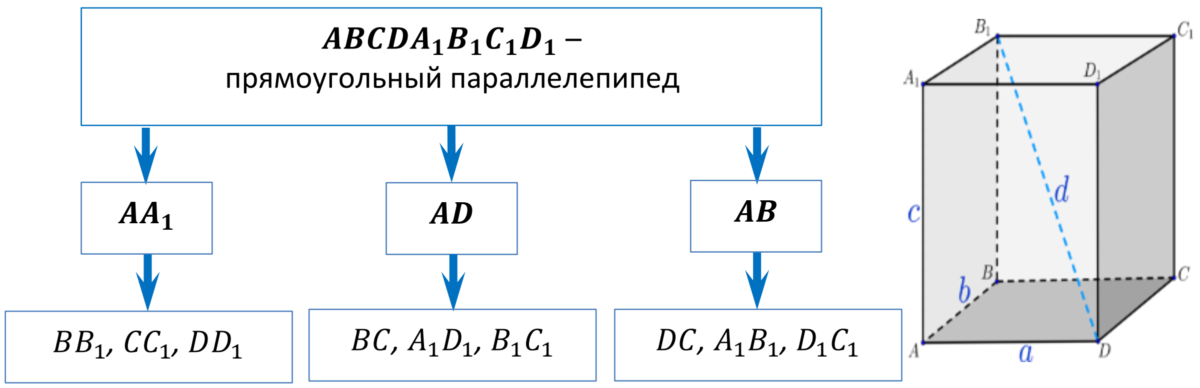


Рис. 27

После составления схемы учащиеся решают задачу и записывают решение.

Отметим, что при решении этой и аналогичных задач учитель только начинает процесс формирования у учащихся 5–6-х классов умения записи цепочки логических утверждений на символьном языке и их обоснования. В практике обучения систематическому курсу геометрии часто учащиеся «сворачивают» запись, объединяя запись нескольких утверждений, что может привести к неверному построению цепочки логических утверждений. Приведем фрагмент записи решения.

к п. 1) Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед (по условию) и AA_1 – вертикальное ребро, то $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ (по свойству прямоугольного параллелепипеда).

к п. 2) Так как ADD_1A_1 – передняя грань параллелепипеда и $AA_1 = 8$ см, $AD = 4$ см (по условию), то 8 см × 4 см – размеры грани ADD_1A_1.

При выполнении задания «Параллелепипед» в явном виде формируются и используются предметные знания и умения. Специально организованная деятельность направлена на формирование и применение познавательных УУД, а именно: *логических действий* – характеризовать геометрический объект через конкретизацию его свойств, выводить следствия из условия и требования задачи, выбирать способ решения учебной задачи (представление схемы поиска решения); *исследовательских действий* – самостоятельно составлять план решения задачи; *работа с информацией* – выбор формы представления информации, представление информации в разных формах.

Таким образом, пример организации проектно-исследовательской работы «Пространство и форма» отображает дидактические особенности изучения в 5-м классе темы «Наглядная геометрия», характеризующиеся возможностью средствами темы:

– формировать у пятиклассников умения логического, в том числе пользоваться методами доказательств и построения цепочки логически верных утверждений, и пространственного мышления;

– формировать функциональную математическую грамотность при изучении геометрической составляющей математики;

– организацией систематического, непрерывного формирования логического и пространственного мышления, функциональной математической грамотности.

2.5.6. Тематические практические работы при изучении темы «Наглядная геометрия»

Изучение наглядной геометрии направлено в первую очередь на развитие образного мышления, пространственного воображения, формирование логического мышления. Большая роль в изучении темы отводится практической деятельности, опыту, эксперименту, моделированию. Особенностью проведения проектно-исследовательской работы по обобщенной теме «Пространство и форма», ориентированной на развитие логики и пространственного мышления, является систематичность, т. е. возвращение к этой работе по мере изучения темы.

Примерной рабочей программой предусмотрено проведение тематических практических работ: «Построение узора из окружностей»; «Построение углов»; «Построение прямоугольника с заданными сторонами на нелинованной бумаге»; «Развертка куба». В рамках этих работ обучающиеся знакомятся с геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве, с их простейшими конфигурациями, учатся изображать их на нелинованной и клетчатой бумаге, рассматривают их простейшие свойства, моделируют фигуры, используя различные материалы. Приведем примеры практических работ.

РАБОТА 1.
Построение узора из окружностей

Место в изучении темы: раздел «Линии на плоскости».

Цель работы: формирование навыков построения окружности; применение свойств окружности; выстраивание алгоритма действий по построению узора; формирование творческого воображения.

Задачи:

1) формировать умение выявления проявления окружности как общей модели в объектах окружающей природы и быта людей;

2) формировать умение группировки объектов на основе выявления общих свойств у геометрических фигур;

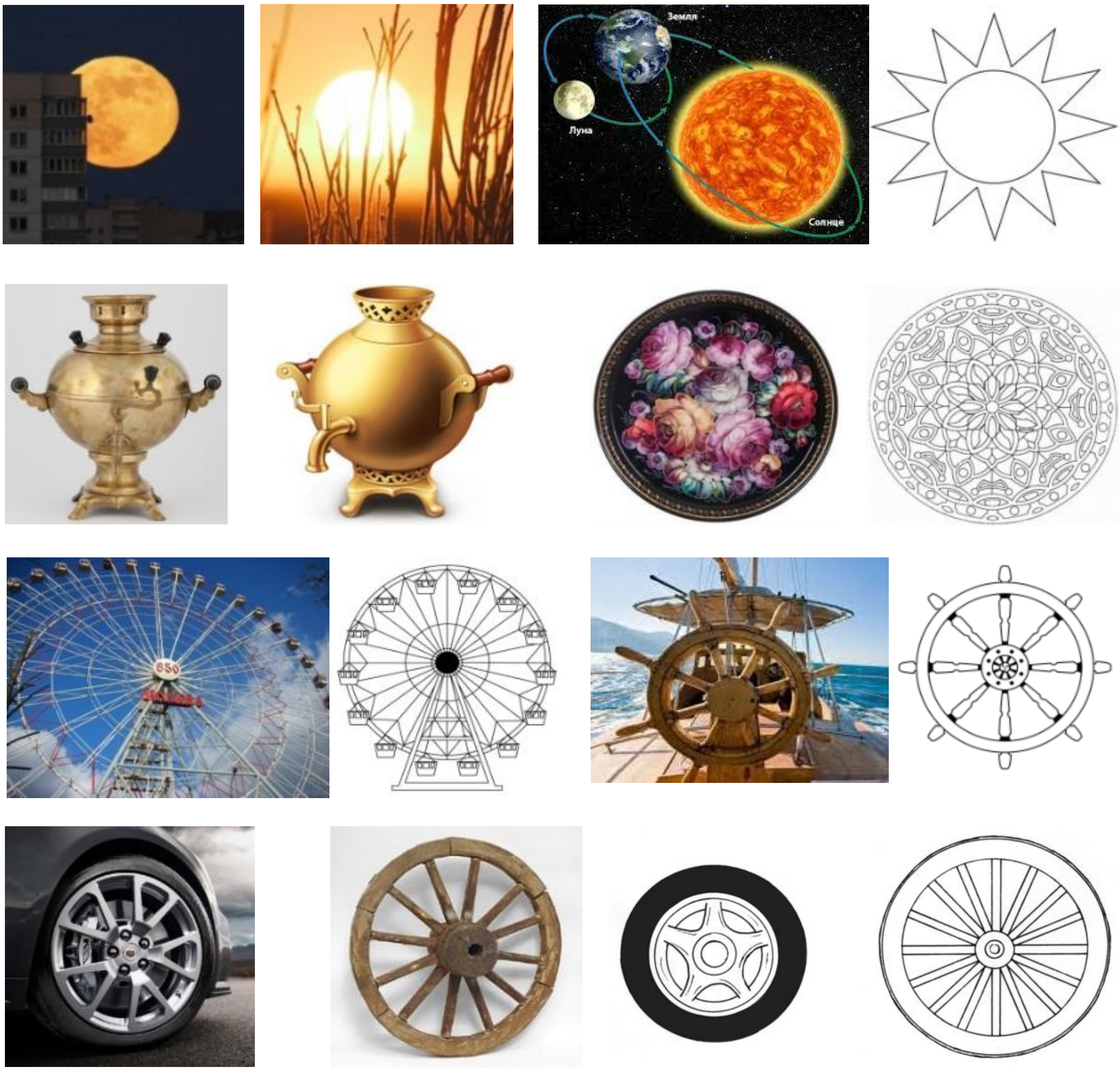
3) сформировать умения выявления окружности как элемента геометрического рисунка;

4) научить изображать окружности с помощью переноса основных конструктивных элементов;

5) построить узоры из окружностей от руки, используя циркуль или программу GeoGebra, и составить предписания построения некоторых узоров;

6) составить предписание для построения окружности от руки на клетчатой бумаге радиусом 5 единиц измерения.

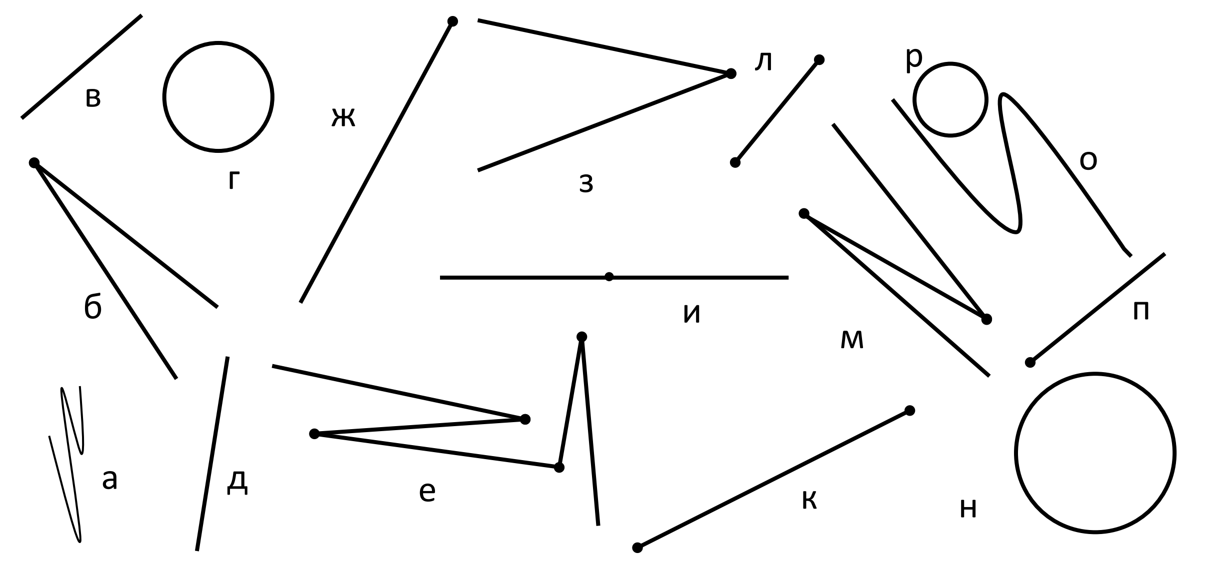
Задание 1. Рассмотрите рисунки. Чем похожи реальные объекты окружающей природы, быта людей или их элементы на их изображения на плоскости? Какая геометрическая фигура объединяет все рисунки?



Задание 2. Вспомните, какие линии, геометрические фигуры вы знаете. Рассмотрите геометрические фигуры на плоскости, изображённые на рисунке. Найдите общие свойства у нескольких фигур.

1) Распределите фигуры, ориентируясь на это свойство на группы.

2) Распределите фигуры на две группы.



Кривая	*Ломаная*	*Прямая*	*Луч*	*Отрезок*	*Окружность*

Рекомендации для учителя. При выполнении п. 2 задания учащиеся самостоятельно предлагают две группы для распределения фигур, например: замкнутая и незамкнутая линия или первая группа – прямая и фигура, состоящая из частей прямой, а вторая – кривая линия и окружность. Учитель акцентирует внимание учеников на окружности.

Задание 3. Рассмотрите фигуры, изображённые на рисунке. Выделите окружности как элемент геометрического рисунка.

Рекомендации для учителя. Учитель предлагает рисунки, которые состоят из одних окружностей, или орнаменты, в которых окружности являются конструктивными элементами. Обучающиеся выделяют окружности и их элементы на узоре мысленно или цветом.

На выбор учащимся можно предложить: самые простые узоры или более сложные; на клетчатой бумаге или на нелинованной; состоящие только из окружностей или включающие и части окружности; содержащие только окружности или и другие фигуры, например, квадрат, отрезки и т. п.; цветные или черно-белые. Ниже приведены примеры разнообразных узоров различных по сложности воспроизведения.

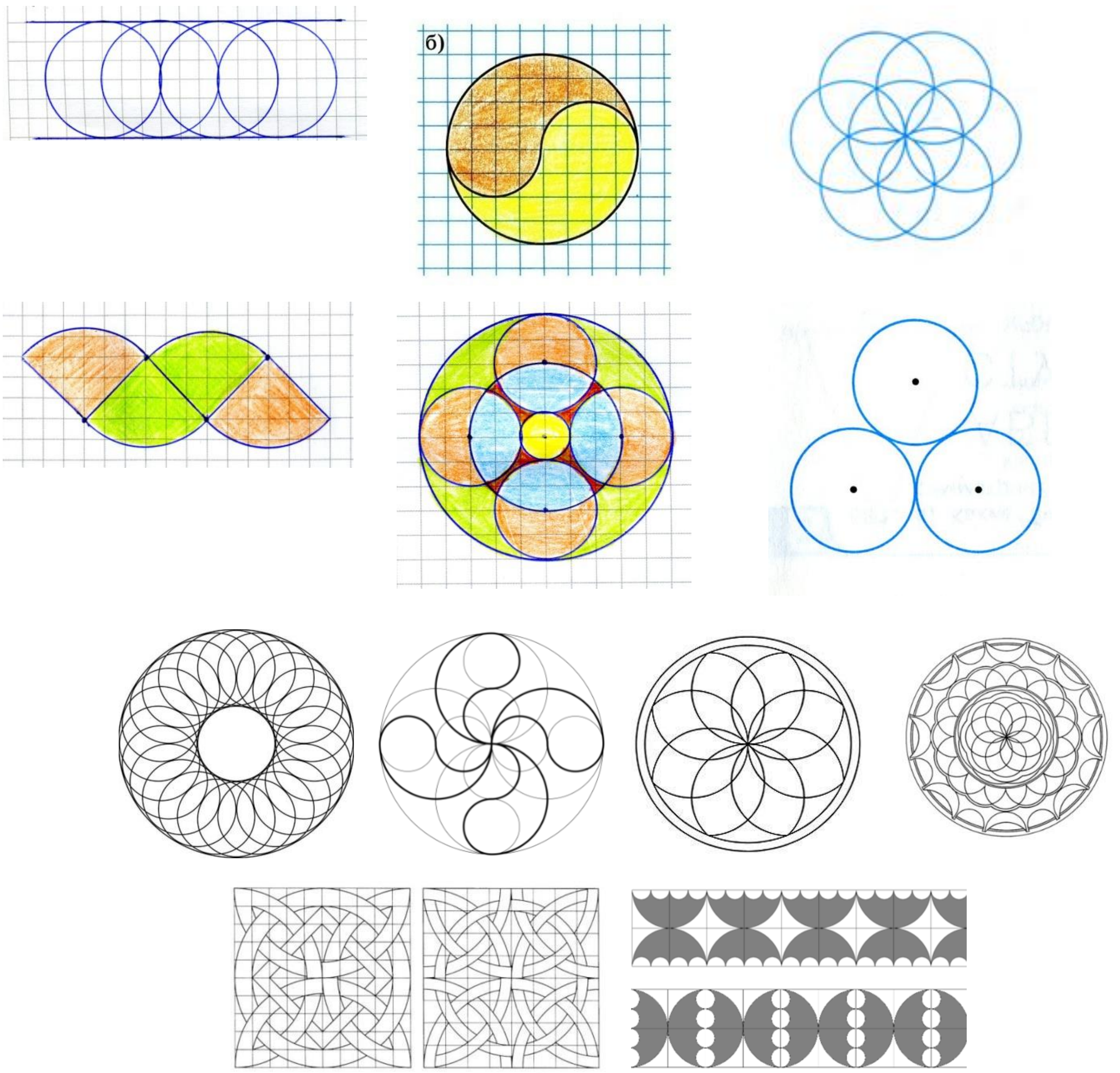


Рис. 28

Учащимся можно предложить самостоятельно воспроизвести заданный узор, можно «оставить» на рисунке некоторые подсказки, которые помогут учащимся правильно «прочитать» изображение и составить алгоритм его воспроизведения, можно задать последовательность построения.

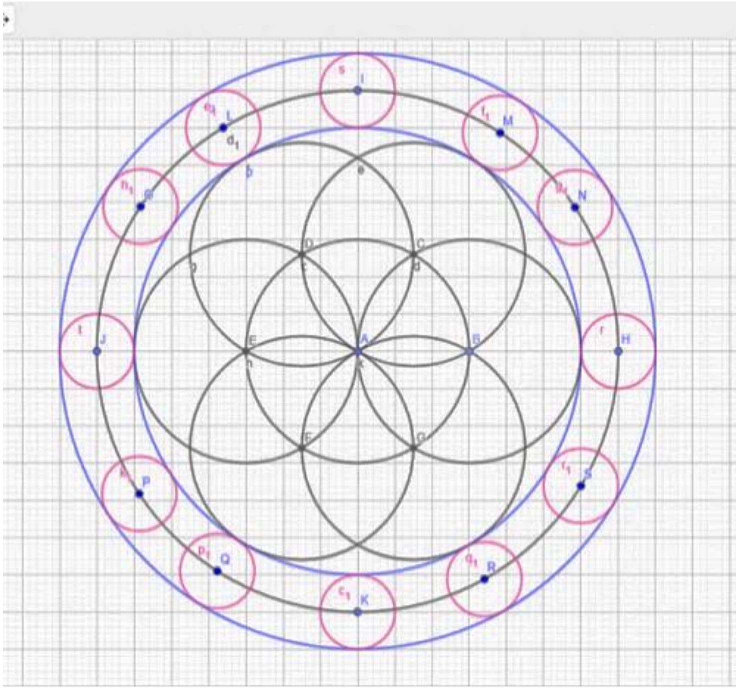


Рис. 29

Задание 4. Нарисуйте окружность от руки.

Учащиеся мысленно представляют окружность заданного радиуса и изображают ее от руки на клетчатой или нелинованной бумаге.

Задание 5. Нарисуйте узор из окружностей.

Учащиеся мысленно представляют узор и изображают его.

Рекомендации для учителя. При выполнении задания 4 учащиеся сначала изображают от руки окружность заданного радиуса. Затем учащиеся по шаблону проверяют точность построения. После этого учитель организует деятельность учащихся, направленную на составление предписания построения окружности от руки на клетчатой бумаге радиусом 5 единиц измерения, например 5 см или клеточек.

При выполнении задания 5 учитель организует построение узоров из окружностей в зависимости от уровня изучения темы. Например, можно организовать деятельность учащихся по построению узоров из окружности от руки, с помощью циркуля или используя программу GeoGebra. Кроме этого, учитель может предложить учащимся готовое предписание для изображения некоторых узоров, например узора «Цветок жизни», или руководить деятельностью, давая задания учащимся. Если учащиеся при построении узора не использовали готовое предписание, то в процессе построения узора или после они записывают последовательность построения.

Предписание для вычерчивания окружности на клетчатой бумаге от руки

1) Поставить первую точку в узле клетки.

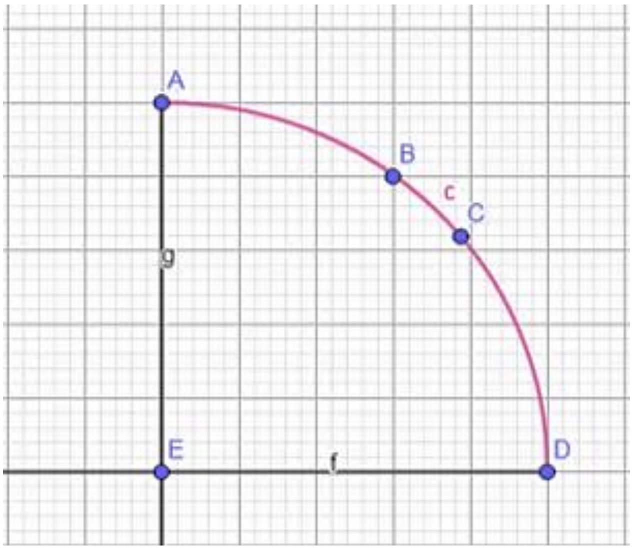
2) Поставить вторую точку, отступив от первой точки три клетки вправо и одну клетку вниз.

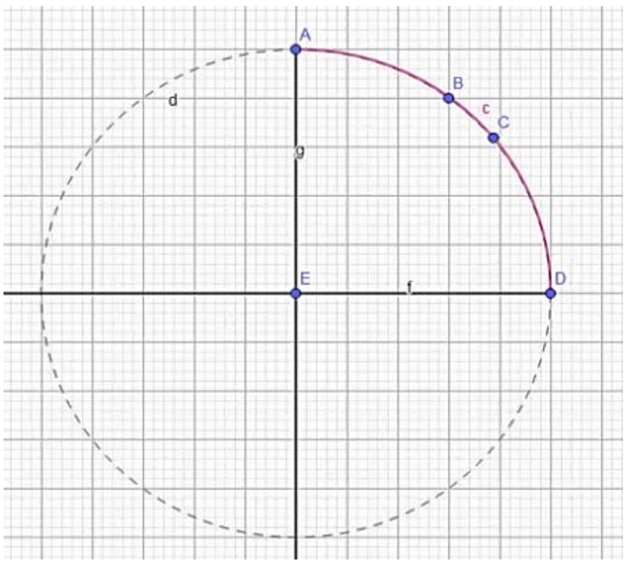
3) Поставить третью точку, отступив от второй точки по одной клетке вправо и вниз.

4) Поставить четвёртую точку, отступив от третьей точки одну клетку вправо и три клетки вниз.

5) Провести плавную линию через полученные четыре точки (получили четверть окружности).

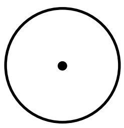
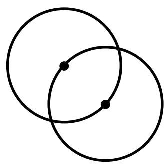
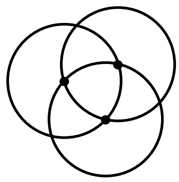
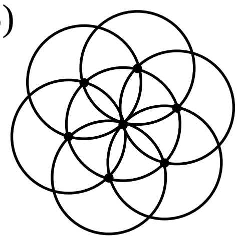
6) Отобразить получившуюся четверть окружности относительно горизонтальной и вертикальной прямых.





Предписание для построения узора «Цветок жизни» из окружностей

1) Выбрать радиус окружности и не изменять его при построении узора.
2) Начертить окружность выбранным радиусом с помощью циркуля.
3) Переставить циркуль в любую точку окружности и нарисовать окружность.
4) Переставить ножку циркуля в точку пересечения окружностей и начертить окружность с центром в точке пересечения.
5) Повторить п. 4. четыре раза.

2) 	3) 	4) 	5) 

РАБОТА 2.
Построение углов

Место в изучении темы: раздел «Линии на плоскости».

Цель работы: формирование навыков построения угла; освоение терминологии, связанной с углами, классификации углов; формирование исследовательских умений и логического мышления.

Задачи:

1) формировать умения сравнения и анализа геометрических объектов, выявления их существенных признаков при формулировании определения понятия «угол» и составлении схемы этого понятия;

2) формировать понятия «угол» и «биссектриса угла» при построении угла и биссектрисы этого угла, используя оригами;

3) развивать умение распознавать угол как геометрическую фигуру;

4) развивать умение изображать на нелинованной и клетчатой бумаге прямой, острый, тупой, развернутый углы;

5) формировать умение составления предписаний на примере предписания построения и измерения угла при помощи транспортира.

6) формировать умение выявления углов в различных конструкциях, в т. ч. реальных объектах.

Задание 1.

1) Рассмотрите фигуры, изображённые на рисунке, и выявите существенные и несущественные свойства фигур.

2) На основании выявленного существенного свойства распределите фигуры на группы.

3) Сформулируйте определение понятия «угол», объединяющее фигуры в группу, используя свойство-признак.

4) Составьте схему определения понятия «угол».

Задание 2.

Постройте углы произвольной величины и их биссектрисы, используя оригами.

Задание 3.

Постройте углы 45°, 90°, 135°, 180°, используя оригами.

Задание 4.

Изобразите на нелинованной и клетчатой бумаге прямой, острый, тупой, развёрнутый углы, ориентируясь на выявленное свойство-признак и сформулированное определение понятия «угол».

Задание 5.

Составьте предписание построения и измерения угла при помощи транспортира.

Задание 6.

Выявите углы в различных конструкциях из геометрических фигур и в реальных объектах окружающей среды.

Рекомендации для учителя. Для организации деятельности учащихся при выполнении задания 1 учитель составляет набор фигур, которые соответствуют понятию «угол» и не соответствуют.

Набор объектов для формулирования определения понятия «угол»

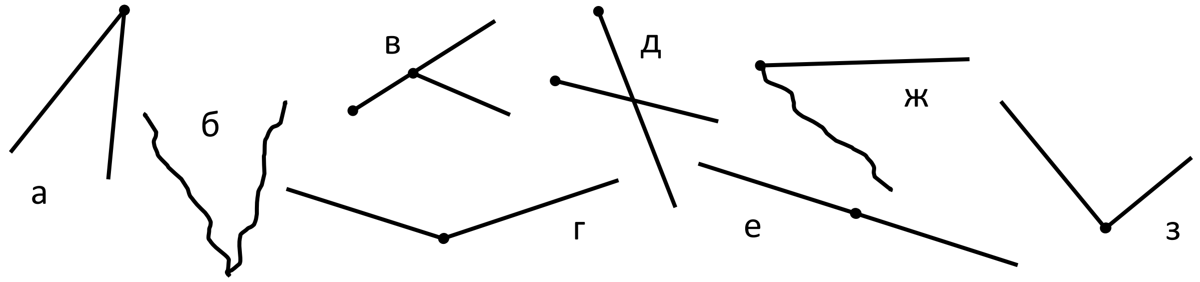


Рис. 30

Учащиеся сравнивают объекты и выявляют, что только на рисунках *а*, *г*, *е*, *з* фигура состоит из двух лучей, выходящих из одной точки. Поэтому они эти объекты относят к первой группе, а все остальные – ко второй группе.

Группа 1 **Группа 2**

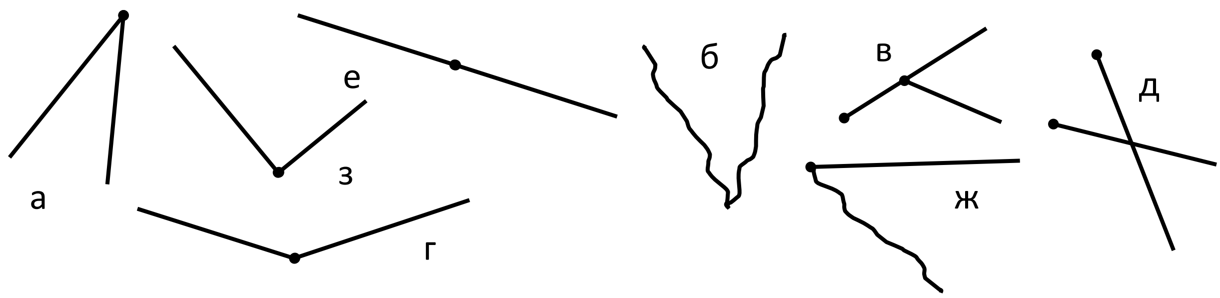
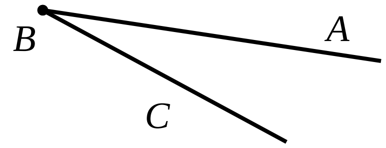


Рис. 31

После этого учащиеся формулируют определение понятия «угол» и составляют схему определения понятия, которая в обучении выполняет функцию карточки-памятки при решении задач на первом уровне или подготовки к промежуточному или итоговому оцениванию сформированности знаний по теме, например, в форме зачета, самостоятельной или контрольной работы.

Угол

– два луча – выходят из одной точки *Обозначение*: $\angle ABC$ или $\angle B$	**И**	

При подготовке к организации деятельности учащихся при выполнении заданий 2 и 3 можно использовать литературу (см. список интернет-ресурсов в конце п. 2.5.6 и Список литературы).

В рамках заданий 4 и 5 учащиеся сначала с опорой на схему определения понятия изображают разные углы по аналогии с углами, полученными с помощью оригами, на нелинованной бумаге, в программе GeoGebra. Затем учитель организует «измерение» углов на рисунке: учащиеся анализируют рисунок и выявляют правильное положение транспортира при измерении величины углов – точка *S* на транспортире и положение лучей *SA* и *SB*.

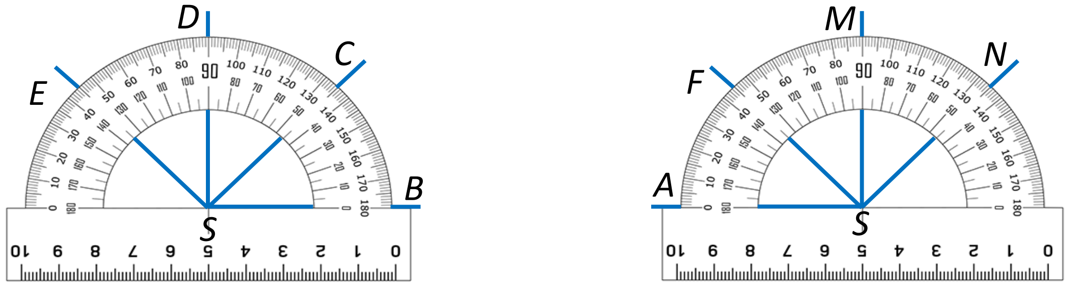
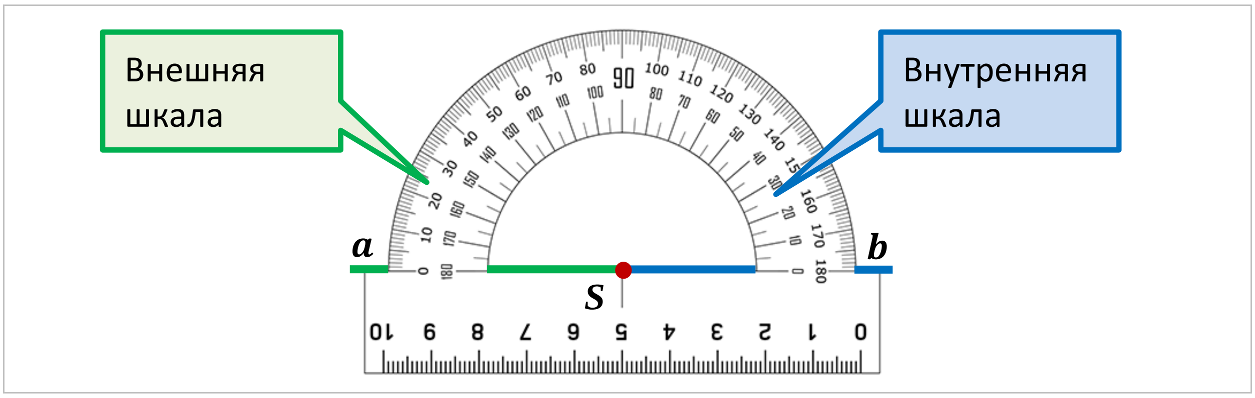


Рис. 32

Учитель акцентирует внимание учащихся на две шкалы, взаимосвязь между расположением транспортира по отношению к углу, который надо построить, и измеряемому углу и используемой шкалой. После этого учитель организует построение угла заданной величины, сначала используя изображение транспортира с отмеченной точкой *S* и проведенными лучами *SA* и *SB*, а затем от луча, изображенного на нелинованной и клетчатой бумаге.

После этой работы учащиеся составляют предписание для построения угла заданной величины и измерения градусной меры угла транспортиром.

Предписание для измерения величины угла



1) Совместить вершину угла с точкой S на транспортире.

2) Совместить одну из сторон угла с лучом a или b, выходящих из точки S.

3) Выявить градусную меру угла:

– если сторона угла совпадает с лучом a, то используя внешнюю шкалу;

– если сторона угла совпадает с лучом b, то используя внутреннюю шкалу.

Выполнение задания 6 ориентировано на исследовательскую работу, направленную на выявление углов в различных конструкциях из геометрических фигур и в реальных объектах окружающей среды, например, на чертежах или рисунках эскалатора в метро, крыши дома, лестницы в доме. При этом надо отметить, что угол, образованный этими реальными объектами, в частности с горизонтом, имеет большое эксплуатационное значение. Например, под углом в 30° к горизонту наклонены все эскалаторы в нашей стране, а угол между подстропильной ногой двускатной крыши дома и горизонтом составлят 45°–53°. Эти конструктивные особенности объектов обеспечивают их безопасное и удобное использование людьми.

РАБОТА 3.

Построение прямоугольника с заданными сторонами на нелинованной бумаге

Место в изучении темы: раздел «Многоугольники».

Цель работы: формирование навыков построения прямоугольника на нелинованной бумаге; формирование исследовательских умений и логического мышления.

Задачи:

1) формировать умение проявления понятия «прямоугольник» через выявление формы в конструкциях из геометрических фигур и в реальных объектах;

2) формировать умение выявления существенных признаков геометрических фигур при составлении схемы определения понятия «прямоугольник»;

3) сформировать умение построения прямоугольника с заданными сторонами, используя линейку и оригами;

4) сформировать умение построения прямоугольника с заданными сторонами на нелинованной бумаге;

5) составить предписание построения прямоугольника с заданными сторонами на нелинованной бумаге.

Задание 1.

Рассмотрите рисунки и выделите геометрические фигуры, из которых состоят объекты.

Задание 2.

1) Рассмотрите фигуры, изображённые на рисунке, и выявите существенные и несущественные свойства фигур.

2) На основании выявленного существенного свойства распределите фигуры на группы.

3) Сформулируйте определение понятия «прямоугольник», объединяющее фигуры в группу, используя свойство-признак.

4) Составьте схему определения понятия «прямоугольник».

Задание 3.

Постройте прямоугольник заданных размеров, используя оригами.

1) Постройте прямоугольник произвольной формы, используя оригами.

2) Выявите, используя оригами, какие особенности фигуры надо учесть при построении, чтобы построить прямоугольник заданных размеров.

Задание 4.

Составьте предписание для построения прямоугольника на нелинованной бумаге с помощью транспортира/угольника и линейки.

1) Постройте прямоугольник с заданными размерами на нелинованной бумаге с помощью транспортира/угольника и линейки.

2) Обобщите выполненную деятельность.

3) Составьте предписание для построения прямоугольника заданных размеров.

Рекомендации для учителя. Для организации деятельности учащихся при выполнении задания 1 учитель составляет набор объектов, которые содержат прямоугольник как геометрическую фигуру или имеют форму прямоугольника, например реальные объекты: книга, часы и аквариум прямоугольной формы, бассейн, дом – в стиле хай-тек.

Задание 2 направлено на формирование умения выявлять наличие признаков (свойств), присущих прямоугольнику, у разных фигур. Формирование этого умения происходит в единстве с формированием умения группировки объектов, структурирования информации на основании наличия или отсутствия каких-либо существенных признаков.

Набор объектов для формулирования определения понятия «прямоугольник»

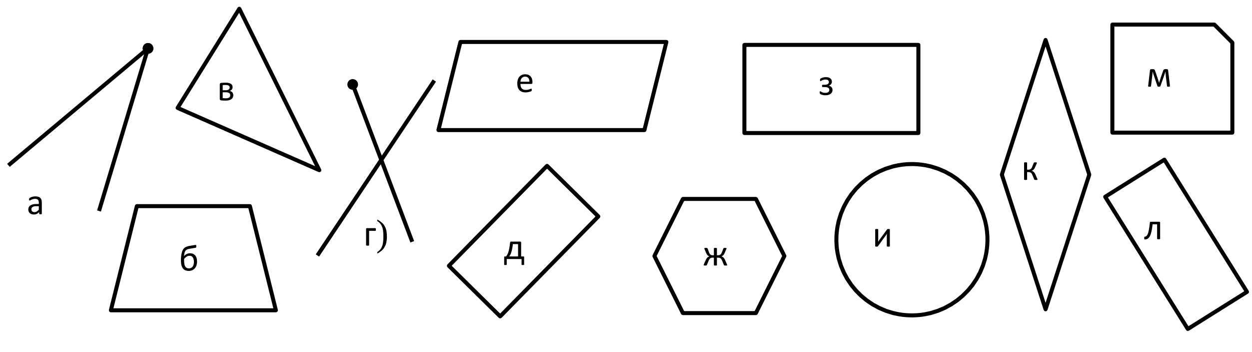


Рис. 33

В одну из групп учащиеся отнесли все четырехугольники, которые на следующем шаге группируют еще в две группы: прямоугольники и другие четырехугольники. Учитель предлагает учащимся выбрать способ результатов группировки, что способствует формированию умения представления информации разными способами. Например, учащиеся не только записали буквы *д*, *з*, *л*, которые соответствуют прямоугольникам, но и составили схему.

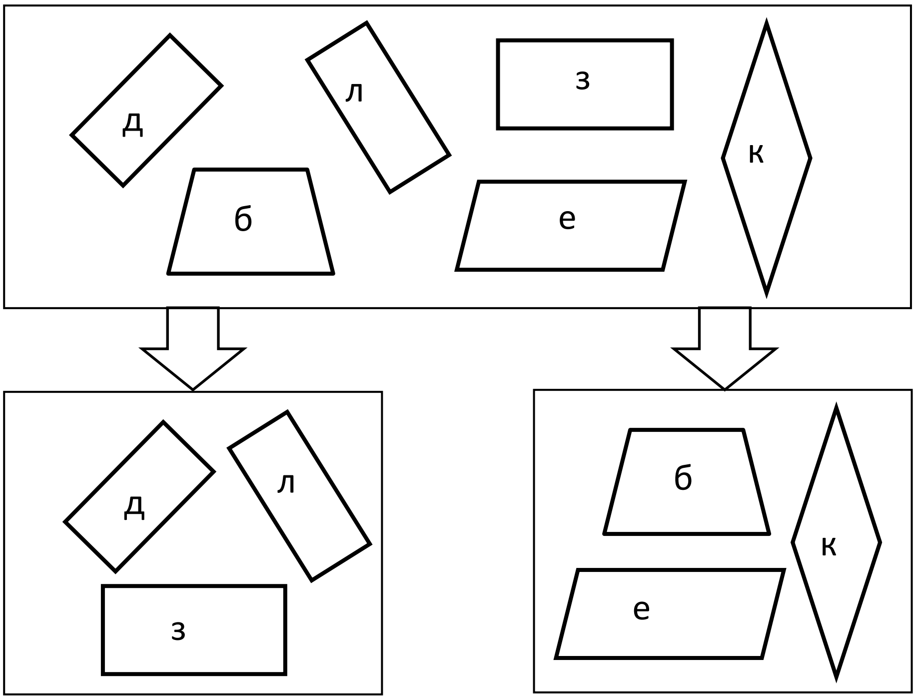
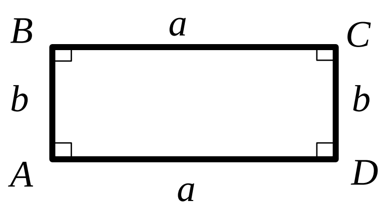


Рис. 34

Результатом деятельности учащихся в рамках задания 2 является схема определения понятия «прямоугольник».

Прямоугольник

– выпуклый четырёхугольник (4 вершины, 4 стороны, 4 угла) – противоположные стороны равны» – все углы прямые *Обозначение*: $ABCD$	**И** **И**	

В рамках заданий 3 и 4 учащиеся строят прямоугольник с помощью оригами, угольника и линейки на нелинованной бумаге. Сначала можно предложить построить прямоугольник произвольных размеров, а потом задать вопрос: «А как построить прямоугольник заданных размеров?» Затем учитель организовывает групповую работу по разрешению этой ситуации.

После этого учитель организовывает построение прямоугольника заданных размеров по двум смежным сторонам. Так как у пятиклассников еще не сформированы в полной мере умения самостоятельного решения задач на построение, то учитель руководит деятельностью учащихся на каждом этапе решения задачи, задавая наводящие вопросы, оказывая консультационную помощь, предлагая образцы выполнения действий, предписания и т. д. Приведем пример.

Пример.

Даны отрезки *MN* и *PK*. Построить прямоугольник *ABCD*, длины сторон которого равны отрезкам *MN* и *PK*.

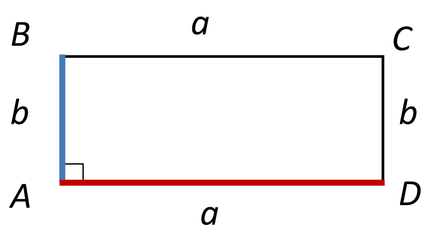


Рис. 35

Рассуждения учащихся.

На этапе анализа задачи учащиеся изображают эскиз прямоугольника от руки и выделяют цветом стороны, которые известны. На этом этапе учащиеся считают прямоугольник построенным и ищут путь построения. Учащиеся вспоминают, что умеют строить прямой угол, равный 90°, и, так как все углы прямоугольника прямые, предлагают сначала построить прямой угол, вершина которого будет вершиной *A* прямоугольника; затем на сторонах угла найти расположение двух точек, которые будут двумя другими вершинами *B* и *D* прямоугольника. Таким образом будет найдено расположение трех вершин. После этого остается найти только расположение вершины *C* прямоугольника, что можно сделать также с использованием транспортира/угольника, а можно усложнить задачу и предложить использовать для поиска положения вершины *C* циркуль. Полезно учить учащихся использовать циркуль для измерения и построения равных отрезков.

На этапе построения искомой фигуры школьники строят прямоугольник по заданным двум смежным сторонам в соответствии с найденным путем (ходом, последовательностью действий) построения.

Затем учащиеся обобщают выполненную деятельность и составляют предписание построения прямоугольника с заданными сторонами.

Предписание для построения прямоугольника по смежным сторонам с использованием транспортира/угольника и линейки

1) Построить угол, градусная мера которого равна 90°.
2) На сторонах угла от вершины угла отложить с помощью линейки отрезки, длины которых равны длинам двух заданных отрезков.
3) Повторить пп. 1–2 для двух найденных вершин прямоугольника. Точка пересечения сторон двух прямых углов – четвёртая вершина прямоугольника.

Получили искомый прямоугольник по двум заданным сторонам.

Предписание для построения прямоугольника по смежным сторонам с использованием циркуля и линейки

1) Построить угол, градусная мера которого равна 90°.
2) На сторонах угла от вершины угла отложить с помощью циркуля отрезки, длины которых равны длинам двух заданных отрезков.
3) Построить дугу окружности с центром в точке, которая лежит на одной стороне угла, и радиусом, равным отрезку, отложенному на другой стороне угла.
4) Повторить п. 3 для точки, которая лежит на другой стороне угла.
5) Отметить точку пересечения дуг окружностей, построенных в пп. 3 и 4.
6) Соединить точки, лежащие на сторонах угла, с точкой пересечения дуг окружностей.

Получили искомый прямоугольник по двум заданным сторонам.

Целесообразно после проведения лабораторной работы предложить учащимся в качестве домашней самостоятельной работы построить прямоугольник, задав длины двух отрезков, ориентируясь на полученные предписания.

РАБОТА 4.

Развертка куба

Место в изучении темы: раздел «Тела и фигуры в пространстве».

Цель работы: формирование представлений о кубе, его поверхности, свойствах куба; формирование воображения и пространственного мышления при построении модели куба с помощью развертки.

Задачи:

1) развивать восприятие понятий, связанных с телами и фигурами в пространстве;

2) развивать пространственное воображение при конструировании разверток куба;

3) сконструировать развертку куба и собрать из нее модель куба.

Задание 1.

Поиграем в кубики.

Задание 2.

Что такое развёртка?

Задание 3.

Сколько развёрток у куба?

1) Проведите эксперимент «Развёртки куба».

2) Ответьте на вопрос: «Сколько развёрток у куба?»

3) Найдите информацию о развёртках куба.

4) Обобщите результаты эксперимента.

Задание 4.

Модель куба.

1) Выберите вид развёртки куба и начертите её.

2) Проверьте правильность построения развёртки куба, сконструировав модель куба.

Рекомендации для учителя. В рамках заданий 1 и 2 учитель должен мотивировать пятиклассников к выполнению практической работы. Так как школьникам уже знакомо понятие куба из детства, начальной школы, то создать проблемную ситуацию можно, например, через игру в кубики, предложив школьникам решить задачи, за основу которых взяты известные задачи-головоломки про паука и муху и про разрезание куба. На этом этапе практической работы можно продемонстрировать видео «Развертка», представленное на сайте «Математические этюды», из которого школьники узнают, что такое развертка многогранника, как задать условия склейки и можно ли из латинского креста, который является разверткой куба, получить другую фигуру.

Задание 3 направлено на поиск информации о числе разверток куба. Учитель организует исследовательскую деятельность учеников, поставив перед ними учебно-познавательную задачу: выяснить, можно ли разрезать куб по ребрам так, чтобы развертками покрыть (заполнить) плоскость без пропусков. Учащиеся выдвигают гипотезы о возможности полного заполнения плоскости и о количестве разверток куба. Затем выполняют эксперимент: представляют, как можно разрезать куб по ребрам, мысленно заполняют плоскость развертками; изображают заполнение на листе бумаги, рисуя различные варианты; работают с бумажными кубиками, разрезая их и заполняя плоскость. При обобщении результатов эксперимента учитель демонстрирует видео «Кубистский паркет» (сайт «Математические этюды»), в котором представлены все одиннадцать способов реберного разрезания куба, что подтвердит или опровергнет гипотезу учащихся о количестве разверток куба.

Задание 4 направлено на конструирование модели куба из развертки. Ученики, узнав, что существует одиннадцать способов реберного разрезания куба, изготавливают развертку, а затем конструируют модель куба.

Важно при этом обращать внимание учащихся на сам процесс сворачивания, на то, какие грани оказались противоположными, а какие – соседними, какие отрезки и точки совместились. Полезно снабдить учащихся и теми фигурами, которые не могут быть развертками, дать им возможность попытаться обнаружить это практическим путем и самостоятельно найти причину. Приобретя такой значительный опыт сворачивания разверток, дальнейшие упражнения учащиеся смогут уже выполнять мысленно либо вспоминая, как они сворачивали данную развертку, если она им уже встречалась, либо по аналогии с этим, если встречаются с ней впервые. В любом случае в дальнейшем учитель должен подстраховывать тех учащихся, которым пока это сделать трудно, дать им развертку в руки, вернуться к практическому способу решения предложенной задачи. Переход от практического решения к мысленному должен осуществляться постепенно, с учетом индивидуального развития учащихся.

Интернет-ресурсы:

1. Видео «Развертка» // Математические этюды. – Электронный доступ: URL: https://etudes.ru/etudes/polyhedra-net/?ref=calso

2. Видео «Кубистский паркет» // Математические этюды. – Электронный доступ: URL: https://etudes.ru/etudes/cubic-parquet/?ref=calso

3. Видео «И это развертка» // Математические этюды. – Электронный доступ: URL: https://etudes.ru/etudes/polyhedra-development/?ref=calso

Подведем итоги

1. Основной целью изучения геометрии на досистематическом этапе является создание широкого круга представлений о геометрических объектах, их свойствах и основных фактах геометрии, развитие пространственного воображения, геометрической зоркости и навыков моделирования геометрических объектов.

В 5–6-х классах учащийся должен накопить значительный запас геометрических знаний в виде фактов, понятий, свойств, способов действий с геометрическими объектами, которые в 7–9-х классах он будет приводить в систему, выстраивать в теорию, основанную на аксиоматическом методе и дедукции. Реализовать эту цель возможно в ходе изучения наглядной геометрии.

2. Отбор содержания и методика его изучения должны быть адекватны возрастным психологическим особенностям учащихся 5–6-х классов. Нельзя забывать и о непрерывности геометрического образования, о геометрической целесообразности и значимости. Содержание распределяется по двум линиям: геометрические фигуры и их свойства; измерение геометрических величин. Логикой изложения содержания является сочетание индуктивного подхода, основанного на приобретенном опыте, и элементов дедукции. В основе изучения содержания лежит наглядно-эмпирический метод познания. Он включает в себя визуальное и практическое изучение геометрических объектов, представленных в предметном и графическом виде, а также в виде мысленных образов. Главным же критерием усвоения содержания является умение – умение построить фигуру, описать ее свойства и т. п.

Литература для учителя

К разделу 1

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации: утверждена распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 N 2506-р // Министерство просвещения Российской Федерации. Банк документов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://docs.edu.gov.ru/ (дата обращения 10.05.2022).

2. Математика. 5–6 классы. Алгебра. 7–9 классы. Планируемые результаты. Система заданий. ФГОС / под ред. Г. С. Ковалевой и О. Б. Логиновой. – М. : Просвещение, 2018.

3. Математика. Сборник рабочих программ. 5–6 классы : пособие для учителей общеобразоват. организаций / [сост. Т. А. Бурмистрова]. – М. : Просвещение, 2014.

4. Перечень поручений по итогам конференции по искусственному интеллекту [Электронный ресурс] // Перечень поручений по итогам конференции по искусственному интеллекту • Президент России (kremlin.ru) (дата обращения: 17.06.2022).

5. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 N 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (Зарегистрирован 05.07.2021 N 64101) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения 04.05.2022).

6. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс] // Примерная основная образовательная программа основного общего образования (edsoo.ru) (дата обращения: 17.06.2022).

7. Примерная рабочая программа основного общего образования предмета «Математика» базовый уровень [Электронный ресурс] // Примерная

рабочая программа основного общего образования предмета «Математика» базовый уровень (edsoo.ru) (дата обращения: 17.06.2022).

8. Рослова Л. О. Международный опыт обучения математике с использованием цифровых технологий // Математика. – 2021. – № 2 (821). – С. 42–50.

9. Рослова Л. О. Проблема обновления содержания общего образования: от частных случаев к созданию комплексной модели / Л. О. Рослова // Вестник образования. – 2017. – № 10. – С. 27–33.

10. Рослова Л. О., Суворова С. Б., Кузнецова Л. В., Минаева С. С. Влияние современного социума на обучение математике в основной школе // Математика. Первое сентября. – 2010. – № 14. – С. 4.

К разделу 2

К п. 2.1

11. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс / Е. А. Бунимович, Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др.: учеб. для общеобр. организаций. – М.: Просвещение. – (УМК «Сферы»).

12. Математика. 5 класс: учеб. для общеобр. организаций / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, И. Ф. Шарыгина и др. / под ред. Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина. – М. : Просвещение.

13. Математика. 5 класс: учеб. для общеобр. организаций / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников и др. – М. : Просвещение.

14. Математика. 5 класс: учеб. для общеобр. организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир; под ред. Подольского В. Е. – М. : Просвещение.

15. Математика. 5 класс: учеб. для общеобр. организаций / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков и др.

16. Метапредметные результаты: Стандартизированные материалы для промежуточной аттестации: 5 класс : пособие для учителя. – М.; СПб. : Просвещение, 2014.

17. Метапредметные результаты: Стандартизированные материалы для промежуточной аттестации: 5 класс : Варианты 1, 2. – М.; СПб. : Просвещение, 2014.

18. Метапредметные результаты: Стандартизированные материалы для промежуточной аттестации: 5 класс : Варианты 3, 4. – М.; СПб. : Просвещение, 2014.

19. Рослова Л. О. Учим читать математический текст // Математика. Первое сентября. – 2011. – № 4.

К пп. 2.2–2.4

20. Алексеева Е. Е. Диверсификация содержания математического образования как средство развития учащихся / Е. Е. Алексеева // Сборник статей международной научно-практической конференции «Образование – 2030. Дорожная карта», 15 июня 2021 г. – М. : Издательство Перо, 2021. – 287 с. – С. 187–191.

21. Алексеева Е. Е. Методика формирования функциональной грамотности учащихся в обучении математике / Е. Е. Алексеева // Проблемы современного педагогического образования. Сборник научных трудов. – Ялта : РИО ГПА, 2020. – Вып. 66. – Ч. 2. – 353 с. – С. 10–15.

22. Алексеева Е. Е. Методические особенности формирования математической грамотности учащихся как составляющей функциональной грамотности / Е. Е. Алексеева // Мир науки, культуры, образования. – 2020. – № 4 (83). – г. Горно-Алтайск, 2020 г. – 508 с. – С. 214–218.

23. Алексеева Е. Е. Реализация требований ФГОС при обучении решению текстовых задач в курсе математики 5–6 классов / Е. Е. Алексеева // Опыт и проблемы математического образования школьников в условиях введения ФГОС ООО (по итогам 2014/2015 учебного года): материалы научно-практической конференции. Москва, 18 мая 2015 г. / под ред. Е. Л. Мардахаевой. – АСОУ, 2015. – 88 с. – С. 14–22.

24. Банк заданий для формирования и оценки функциональной грамотности обучающихся основной школы (5–9 классы) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/ (дата обращения 01.09.2022).

25. Компьютер на уроке: создание современной информационно-образовательной среды [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://seninvg07.narod.ru/index.htm (дата обращения 01.09.2022).

26. Математическая грамотность. Сборник эталонных заданий. Выпуск 1 : учеб. пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / [Г. С. Ковалева и др.]; под ред. Г. С. Ковалевой, Л. О. Рословой. – М.; СПб. : Просвещение, 2021. – (Функциональная грамотность. Учимся для жизни).

27. Математическая грамотность. Сборник эталонных заданий. Выпуск 2 : учеб. пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / [Г. С. Ковалева и др.]; под ред. Г. С. Ковалевой, Л. О. Рословой. – М.; СПб. : Просвещение, 2021. – (Функциональная грамотность. Учимся для жизни).

28. Новая образовательная среда «Единое окно доступа к информационным ресурсам» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://window.edu.ru (дата обращения 01.09.2022).

29. Примеры заданий по математической грамотности, которые использовались в исследовании PISA в 2003–2012 годах [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.centeroko.ru/pisa15/pisa15_pub.html (дата обращения 01.09.2022).

30. Рослова Л. О. В поиске путей развития математической грамотности учащихся / Л. О. Рослова // Педагогические измерения. – 2017. – № 2.– С. 63–68.

31. Рослова Л. О. Используем открытые задания исследования PISA / Л. О. Рослова // Математика. – 2020. – № 2. – С. 8–13.

32. Рослова Л. О. О формировании функциональной математической грамотности младших школьников / Л. О. Рослова // Начальное образование. – 2018. – № 2 (85). – С. 10–16.

33. Рослова Л. О. Формирование метапредметных результатов обучения средствами практико-ориентированных заданий с математическим содержанием / Л. О. Рослова // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2017. – Т. 2. – № 5 (44). – С. 69–78.

34. Рослова Л. О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать / Л. О. Рослова // Педагогика. – 2018. – № 10. – С. 48–55.

35. Рослова Л. О. Квитко Е. С. Денищева Л. О.' Карамова И. И. Проблема формирования способности «применять математику» в контексте уровней математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2020. – Т. 2. – № 2 (70). – С. 74–99. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44358177.

36. Рослова Л. О., Краснянская К. А., Квитко Е. С. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2019. – Т. 1. – № 4 (61). – С. 58–79.

37. Электронный банк заданий для оценки функциональной грамотности [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fg.resh.edu.ru/ (дата обращения 01.09.2022).

К п. 2.5

38. Афонькин С. Ю., Капитонова И. В. Оригами и геометрия. – Чебоксары : ЧГУ, 1993.

39. Белим С. Н. Задачи по геометрии, решаемые методами оригами. – М. : Изд-во «Аким», 1998.

40. Грищенко Д. И. Оригами, или что можно получить с помощью складывания листа бумаги // Математическое просвещение. – 2013. – Вып. 17. – С. 68–87.

41. Дьюдени Г. Э. Пятьсот двадцать головоломок / Сост. и ред. амер. изд. М. Гарднер; пер. с англ. Ю. Н. Сударева. – М. : Мир, 1975.

42. Журнал «Оригами». – № 7 (май–июнь 1997). – М. : Изд-во «Аким».

43. Журнал «Оригами». – № 3 (май–июнь 1998). – М. : Изд-во «Аким».

44. Журнал «Оригами». – № 6 (ноябрь–декабрь 1999). – М. : Изд-во «Аким».

45. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс: учеб. для общеобр. организаций / Е. А. Бунимович, Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др. – М. : Просвещение, 2020. – (УМК «Сферы»).

46. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс: задачник / Е. А. Бунимович, Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др. – М. : Просвещение, 2020. – (УМК «Сферы»).

47. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс: тетрадь-тренажер / Е. А. Бунимович, Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др. – М. : Просвещение, 2020. – (УМК «Сферы»).

48. Математика. Наглядная геометрия. 5–6 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / В. А. Панчищина, Э. Г. Гельфман и др. – М. : Просвещение, 2019.

49. Математика: учеб. для учащихся 5 классов общеобр. организаций / под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – М. : Просвещение, 2020.

50. Математика: рабочая тетрадь для учащихся 5 классов общеобр. организаций / УМК под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – М. : Просвещение, 2020.

51. Математические этюды [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://etudes.ru/etudes/polyhedra-net/?ref=calso (дата обращения 01.09.2022).

52. Наглядная геометрия. Рабочая тетрадь / В. А. Смирнов, И. В. Ященко, И. М. Смирнова. – М. : МЦНМО. – (Рабочие тетради: 1) Отрезки и прямые. Углы. Геометрические места точек. 2) Многоугольники и ломаные. Симметрия. Кривые как траектории движения точек. 3) Паркеты.

Площадь. Разрезание. 4) Многогранники. Правильные многогранники. Объем и площадь поверхности.)

53. Наглядная геометрия: учеб. пособие по математике для 5 класса общеобразоват. организаций / Н. Б. Истомина, Н. С. Подходова, Н. Б. Тихонова. – М. : Просвещение.

54. Ходот Т. В., Ходот А. Ю., Велиховская В. Л. Математика. 5–6 классы. Наглядная геометрия. – М. : Просвещение, 2021.

55. Чиканцева Н. И. Оригами в геометрии. – Москва, 1996.

56. Шарыгин И. Ф. Некоторые размышления по поводу школьного курса геометрии // Учительская газета. – 1992. – № 20. – С. 11–13.

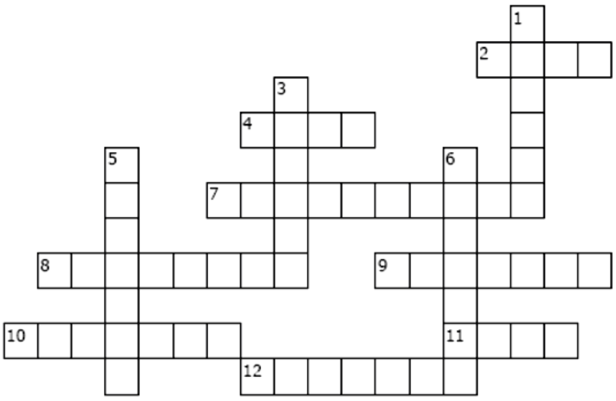
57. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Математика. Наглядная геометрия. 5–6 классы. – М. : Дрофа; Российский учебник, 2019.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Примеры задач, используемых при изучении темы «Натуральные числа» для организации процесса формирования функциональной математической грамотности

Пример 1.

Кроссворд по математике. 5-й класс. «Деление натуральных чисел»



По горизонтали:

2. 777 : 111 = …?

4. Число, на которое делить нельзя.

7. Какое число является в выражении делимое 12 : 4 = 3?

8. Число, на которое делят.

9. Число, которое иногда получается при делении.

10. Число, которое делят.

11. 3 : 3 = …?

12. Действие, обратное умножению.

По вертикали:

1. Какое число является в выражении частным 63 : 7 = 9?

3. Какое число является в выражении делителем 24 : 8 = 3?

5. Многозначные числа удобнее делить в … .

6. Результат деления.

Пример 2.

Простое число

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышёв доказал, что между любым натуральным числом n (кроме 1) и удвоенным – $2n$ всегда находится, по меньшей мере, одно простое число. Например, между 2 и 4 находится простое число 3. Проверьте это свойство для всех натуральных чисел от 3 до 20.

Решение задачи удобно оформить в виде таблицы, в которой в первой строке будут числа от 3 до 20, во второй – удвоенное число, а в третьей – простое число, находящееся между ними, которое учащиеся приводят самостоятельно. Можно предложить учащимся выписать все простые числа, которые находятся между числом n (кроме 1) и $2n$.

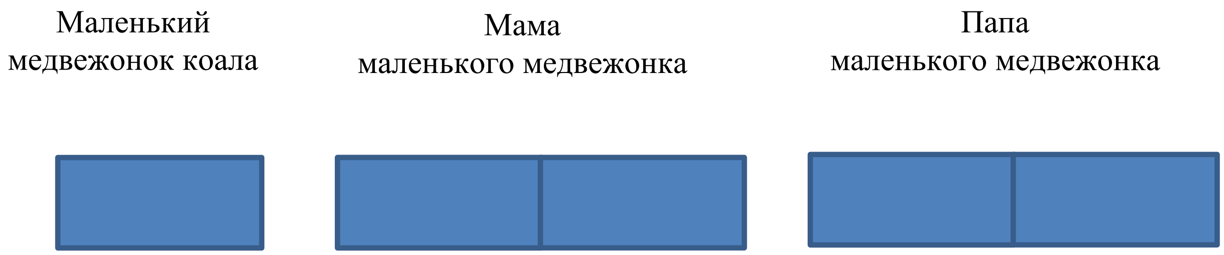
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$2n$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
Простые числа, расположенные между натуральным числом и удвоенным	3																		
		5	5																
			7	7	7														
					11	11	11	11	11										
						13	13	13	13	13	13								
								17	17	17	17	17	17	17	17				
									19	19	19	19	19	19	19	19	19		
											23	23	23	23	23	23	23	23	23
														29	29	29	29	29	29
															31	31	31	31	31
																		37	37

Пример 3.

Медведь коала

Маленький коала съедает листья с одного эвкалиптового дерева за 10 часов, а каждый из его родителей ест вдвое быстрее. За сколько времени это семейство объест все листья с одного эвкалиптового дерева?
Запиши решение по действиям с пояснениями и ответ.

Схема поиска решения задачи



Рассуждения учащихся

Так как каждый из родителей маленького медвежонка коала за 1 час ест вдвое быстрее, то вместе за 1 час они съедят в 5 раз больше листьев эвкалиптового дерева. Следовательно, вместе им понадобится в 5 раз меньше времени, т. е. 10 : 5 = 2 (ч).

Ответ: за 2 часа.

Пример 4.

Микроб

В банку попал 1 микроб, и через 20 минут банка была наполнена микробами, причём известно, что количество микробов ежеминутно удваивалось. За сколько минут банка была наполнена микробами наполовину? Запиши свои рассуждения и ответ.

Схема поиска решения задачи

Рассуждения учащихся

1) Так как каждую минуту количество микробов удваивается, то и в течение последней минуты количество увеличилось вдвое.

2) Так как через 20 минут банка полностью была наполнена микробами, то в течение 20-й минуты их количество стало в два раза больше (банка стала полностью наполнена), следовательно, за первые 19 минут банка наполнилась наполовину.

Ответ: через 19 минут.

Пример 5.

Метрополитен

Московский метрополитен открыт с шести утра до часу ночи. В настоящее время самая медленная скорость движения эскалатора – 75 см/с. Сколько километров в день пробегает каждая ступенька эскалатора?

Рассуждения учащихся

1) Так как эскалатор движется с шести утра до часу ночи, то время его движения 19 часов = 19•3600 = 68400 с.

2) 75•6840000 = 5130000 (см) = 51300 (м) = 51 км 300 м.

Предложить учащимся выполнить округление и найти приближенное число километров (примерно 51 км).

Ответ: 51 км.

Пример 6.

Вредные выбросы

Бак легкового автомобиля вмещает около 56 л бензина, или почти 42 кг по массе. Для его использования потребуется по массе почти в 4 раза больше кислорода.

При эксплуатации автомобиля расход топлива – 10 л на 100 км.

Автолюбитель решил перед путешествием на расстояние 1680 км к морю сравнить потребление кислорода и выбросы диоксида углерода за поездку, если расход бензина 10 л на 100 км и при потреблении 14 л бензина выброс диоксида углерода составляет 9 кг, и решить, каким транспортом он поедет в путешествие. Помогите путешественнику выполнить расчёты.

Решение.

1) 42•4 = 168 кг кислорода съедает 1 бак бензина

2) 100 км – 10 л, то 10 км – 1 л

3) 1680:10 = 168 л надо в одну сторону

4) 168:56 = 3 бака бензина в одну сторону

5) 3•2 = 6 баков бензина за всю поездку (туда и обратно)

6) 168•6 = **1008 кг** кислорода съест автомобиль за всю поездку

7) 1008:14 = 72 – в 72 раз больше понадобится бензина

8) 9•72= **648 кг** – диоксида углерода.

Следовательно, **1008 кг** кислорода съест автомобиль за всю поездку, выбросы диоксида углерода составят **648 кг**.

Кроме диоксида углерода автомобиль выбрасывает в воздух оксиды азота, углеводороды и др.

Пример 7.

Музыкальный ребус

Ежегодно в международный день числа π в школе проходит математический праздник. В этом году ребятам предложили разгадать музыкальный ребус.

Решите ребус, заменив ноты цифрами так, чтобы все указанные арифметические действия по горизонтали и вертикали выполнялись, а полученные результаты были верными.

Рекомендации и подсказки в случае затруднений

1) Каждой ноте соответствует определенная цифра – одна и та же для одной и той же ноты в любой октаве и в любом ключе – скрипичном или басовом.

2) Учитываются бемоли (♭), диезы (♯) и бекары (♮), так как основных нот в октаве семь, а цифр десять.

3) Можно перевести ребус в более удобную (привычную) для учащихся форму – буквенное обозначение.

Решение.

А	Б	В	–	Б	Г	Д	=	Д	Б	А
	:				+				–	
	Е	Б	•			Ж	=		З	Б
	И	И	+	Б	Г	К	=	Б	А	Д

5	2	8	–	2	0	3	=	3	2	5
	:				+				–	
	1	2	•			6	=		7	2
	4	4	+	2	0	9	=	2	5	3

Есть и другие варианты, поэтому можно предложить учащимся их найти.

Пример 8.

Остров Врангеля

В Северном Ледовитом океане между Восточно-Сибирским морем и Чукотским морем расположен российский остров Врангеля, который назван в честь российского мореплавателя и государственного деятеля XIX века Фердинанда Петровича Врангеля. Остров находится на границе Западного и Восточного полушарий и разделяется 180-м меридианом на две почти равные части. Отделён от материка (северное побережье Чукотки) проливом Лонга, шириной в самой узкой части около 140 км. Площадь острова составляет приблизительно семь с половиной тысяч квадратных километров.

О существовании этого острова русским первопроходцам было известно ещё с середины XVII века по рассказам коренного населения Чукотки и аляскинских эскимосов. Не позже 1707 года русский первопроходец Иван Львов впервые нанёс остров на карту. Осенью 1911 года российская гидрографическая экспедиция на судне «Вайгач» высадилась на острове Врангеля и подняла на нём российский флаг. В 1926 году была основана полярная станция, которой руководил исследователь Г. Я. Ушаков.

Вопрос 1. Сколько лет прошло с момента, когда нанесли остров Врангеля на карту, до момента водружения российского флага на острове?

Вопрос 2. В каком веке на острове была основана полярная станция?

а) XVII б) XIX в) XX г) XXI

Вопрос 3. Что меньше: площадь города Москвы в пределах МКАД или площадь острова Врангеля и на сколько?

Вопрос 4. Укажите, в начале какого века остров Врангеля окончательно стал принадлежать России и почему?

Приложение 2. Примеры тем и материалов для конструирования кейса

Пример 1.

Мосты

Мост – дорожное сооружение, возведённое над каким-либо препятствием, например, через водоём, овраг. Мост, возведённый через дорогу или железнодорожные пути, называют путепроводом, через овраг или ущелье – виадуком. Мост является одним из древнейших инженерных изобретений человечества.

Реально ли сосчитать все мосты, расположенные в самом Петербурге и его пригородах? Это очень сложно.

Общая протяжённость всех водотоков на территории Санкт-Петербурга достигает 282 км, а их водная поверхность составляет около 7% всей площади города. В городе и его пригородах много рек и каналов, только в черте города 94 рек, рукавов, протоков и 20 искусственных каналов общей протяжённостью свыше 160 км.

Через каждый, даже очень небольшой, ручей перекинуто множество мостов. К примеру, в Петербурге и пригородах насчитывается около 800 мостов, более 300 из них расположены на территории города. Тридцать мостов Петербурга охраняются государством, представляют историческую ценность.

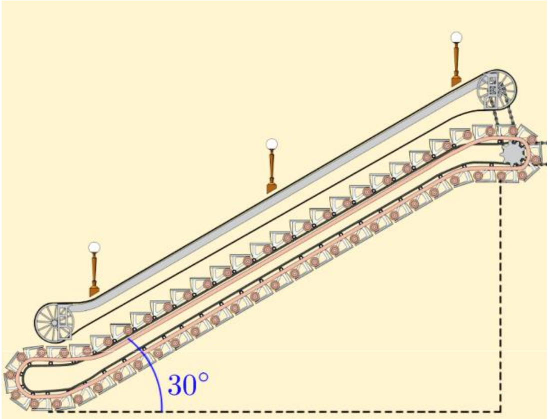
Дворцовый мост в Санкт-Петербурге, 1916 г.

23 декабря 2016 г. самому популярному мосту Петербурга исполнилось 100 лет.

Пример 2.

Метро

Когда проектировали эскалатор, даже подбор материалов для роликов был очень важной и трудной задачей. Московский метрополитен открыт примерно с шести утра до часу ночи, т. е. больше 19 часов – больше 68 тысяч секунд в день. Самая медленная скорость эксплуатации эскалатора сейчас 0,75 м/с, значит, ступенька пробегает каждый день больше 50 километров. И так без устали, день за днём, в год более 18 тысяч километров! Представляете, каков должен быть материал, чтобы ролики без регулярных ремонтов и замен могли выдерживать постоянно едущих на ступеньках пассажиров. И это только одна деталь и один вопрос, который пришлось решать советским инженерам, а таких вопросов были тысячи.



Вот так примерно выглядит схема эскалатора. Если посмотреть сбоку, то видно, что именно взаимное расположение направляющих рельс больших и маленьких роликов обеспечивает основное свойство эскалатора: в верхней части «живой лестницы», по которой едут пассажиры, ступени всегда горизонтальны. В нижней же части ступени возвращаются вверх параллельно направляющим, не занимая места в туннеле.

Читать полностью: Глубина заложения / Этюды // Математические этюды. – URL https://etudes.ru/etudes/underground.

Приложение 3. Примеры заданий для организации процесса формирования и выявления уровня сформированности функциональной математической грамотности в 5-м классе

[Математическая грамотность. Методические рекомендации, 5–9 классы, 2021 г.]

Пример 1.

Грибная охота

Грибная охота
Задание 1/3

Прочитайте текст «Грибная охота», расположенный справа. Заполните запись выражения числами.

Русаковы купили 4 разные корзинки общей вместимостью 25 литров. Какие корзинки купили Русаковы?

Дополните числовое выражение, которое покажет, какой вместимости корзинки купили Русаковы.

☐ + ☐ + ☐ + ☐ = 25

ГРИБНАЯ ОХОТА

Семья Русаковых (папа, мама, дочь и сын) приобрела на август путевки в пансионат. Их знакомые, которые отдыхали в этом пансионате, предупредили, что область, где расположен пансионат, славится грибными местами. Русаковы решили запастись корзинами для грибов. Они поручили своей 12-летней дочери Наде посмотреть, что предлагается в Интернете.

Надя выбрала понравившиеся ей корзинки и составила таблицу.

Характеристика					
Вместимость. Объём, л	9	8	6	4	2

Грибная охота
Задание 2/3

Прочитайте текст «Грибная охота», расположенный справа. Запишите свой ответ на вопрос в виде числа.

Используйте информацию из текста, расположенного справа, чтобы определить, сколько грибов (в граммах) собрал папа.

Запишите свой ответ в виде числа.

[ ] граммов

ГРИБНАЯ ОХОТА

Русаковы сходили в лес за грибами, а затем взвесили собранные грибы.

Марина обратила внимание, что числовые значения масс грибов образуют последовательность, в которой каждая следующая масса, начиная со второй, больше предыдущей на одну и ту же величину.

Марина собрала меньше всех грибов – 750 г, мама собрала 2 кг 250 г, Костя собрал больше всех – 5 кг 250 г. Папа собрал больше грибов, чем мама.

Сколько грибов собрал папа?

Марина собрала меньше всех грибов	750 г
Мама собрала	2 кг 250 г
Костя собрал больше всех	5 кг 250 г
Папа собрал больше грибов, чем мама.	

Грибная охота
Задание 3/3

Прочитайте текст «Грибная охота», расположенный справа. Для ответа на вопрос отметьте нужные варианты ответа.

Среди собранных семьёй Русаковых грибов оказалось 2 кг 650 г белых грибов, которые решено было засушить. После очистки белых грибов весы показали 2 кг 150 г. Верно ли, что из очищенных грибов получится меньше половины килограмма сухих?

*Отметьте **все** верные варианты ответа.*

☐ Верно. Объяснение: 2150 : 5 = 430 (г), 430 г < 500 г.

☐ Неверно. Объяснение: 2650 : 5 = 530 (г), 530 > 500 г.

☐ Верно. Объяснение: Сушат очищенные грибы, пятая часть очищенных грибов составляет 430 граммов, это меньше половины килограмма.

☐ Неверно. Объяснение: Пятая часть грибов составляет 530 граммов, это больше половины килограмма.

☐ Неверно. Объяснение: 2650 – 2150 = 500 г, это не меньше половины килограмма.

ГРИБНАЯ ОХОТА

Грибы в основном состоят из воды. Известно, что при сушке очищенных грибов остаётся лишь пятая часть их массы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ (5 класс)
Характеристики заданий и система оценивания

ЗАДАНИЕ 1. ГРИБНАЯ ОХОТА. (1 из 3). МФГ_МА_5_015_01_А6

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЯ:

- **Содержательная область оценки**: неопределенность и данные
- **Компетентностная область оценки**: рассуждать
- **Контекст**: личный
- **Уровень сложности**: низкий
- **Формат ответа**: задание с несколькими краткими ответами
- **Объект оценки**: подбирать данные для ответа на вопрос, представлять результат в заданном виде (числовое выражение)
- **Максимальный балл**: 1 балл

Система оценивания:

Балл	Содержание критерия
1	Записано верное числовое равенство 9 + 8 + 6 + 2 = 25, слагаемые могут быть записаны в любом порядке
0	Другие варианты или ответ отсутствует.

ЗАДАНИЕ 2. ГРИБНАЯ ОХОТА. (2 из 3). МФГ_МА_5_015_02_А6

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЯ:

- **Содержательная область оценки**: изменение и зависимости
- **Компетентностная область оценки**: рассуждать
- **Контекст**: личный
- **Уровень сложности**: средний
- **Формат ответа**: задание с кратким ответом
- **Объект оценки**: устанавливать последовательность значений величин (массы), правило, по которому она составлена, дополнять последовательность
- **Максимальный балл**: 2 балла

Система оценивания:

Балл	Содержание критерия
2	Записано число 3750 ИЛИ 3 750.
1	Записано число 1500 ИЛИ 1 500 («шаг последовательности»).
0	Другие варианты или ответ отсутствует.

ЗАДАНИЕ 3. ГРИБНАЯ ОХОТА. (3 из 3). МФГ_МА_5_015_03_А6

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЯ:

- **Содержательная область оценки**: количество
- **Компетентностная область оценки**: применять
- **Контекст**: общественный
- **Уровень сложности**: средний
- **Формат ответа**: задание с выбором нескольких верных ответов
- **Объект оценки**: находить долю числа, выбранного в соответствии с практической ситуацией, выбирать правильные ответы с объяснением
- **Максимальный балл**: 2 балла

Система оценивания:

Балл	Содержание критерия
2	Отмечены ответы: 1 (Верно. Объяснение: 2150:5= 430 (г), 430 г < 500 г) и 3 (Верно. Объяснение: Сушат очищенные грибы, пятая часть очищенных грибов составляет 430 граммов, это меньше половины килограмма) и никакие другие.
1	Отмечен один любой из двух верных ответов и никакой другой.
0	Другие варианты или ответ отсутствует.

Пример 2.

Зеленый кузнечик

Зелёный кузнечик
Задание 1 / 3

Прочитайте текст «Зелёный кузнечик», расположенный справа. Для ответа на вопрос отметьте нужный вариант ответа.

Самка зелёного кузнечика отложила 70 яиц. Сколько примерно личинок кузнечика весной смогут добраться до поверхности?

*Отметьте **один** верный вариант ответа.*

- O 70
- O 63
- O 10
- O 7

ЗЕЛЁНЫЙ КУЗНЕЧИК

Леонид интересуется жизнью кузнечиков. Он собирает информацию об области обитания, условиях проживания, питания, особенностях поведения. Из книг он узнал, что жизнь самого распространённого в нашей стране кузнечика – зелёного – зарождается в почве, на глубине примерно 6 см. Из кладки яиц, которую самка закладывает осенью, появляется и добирается до поверхности примерно десятая часть личинок, каждая размером около 5 мм. Одна из особенностей взрослого кузнечика – длинный, по сравнению с размером тела, прыжок. Зелёный кузнечик может прыгнуть на расстояние, в 20 раз превышающее длину его тела.

Зелёный кузнечик
Задание 2 / 3

Прочитайте текст «Зелёный кузнечик», расположенный справа. Заполните в таблице пропущенные данные.

Леонид решил представить информацию о зелёном кузнечике в таблице.

Заполните пропуски в таблице.

Кузнечик зелёный

Характеристика	Среднее значение
Длина личинки кузнечика при рождении	__________ мм
Длина тела взрослого кузнечика	28 мм
Длина прыжка	___________ мм
Скорость полёта	30 м/мин

ЗЕЛЁНЫЙ КУЗНЕЧИК

Леонид интересуется жизнью кузнечиков. Он собирает информацию об области обитания, условиях проживания, питания, особенностях поведения. Из книг он узнал, что жизнь самого распространённого в нашей стране кузнечика – зелёного – зарождается в почве, на глубине примерно 6 см. Из кладки яиц, которую самка закладывает осенью, появляется и добирается до поверхности примерно десятая часть личинок, каждая размером около 5 мм. Одна из особенностей взрослого кузнечика – длинный, по сравнению с размером тела, прыжок. Зелёный кузнечик может прыгнуть на расстояние, в 20 раз превышающее длину его тела.

Зелёный кузнечик
Задание 3 / 3

Прочитайте текст «Зелёный кузнечик», расположенный справа. Отметьте нужный вариант ответа, а затем объясните свой ответ.

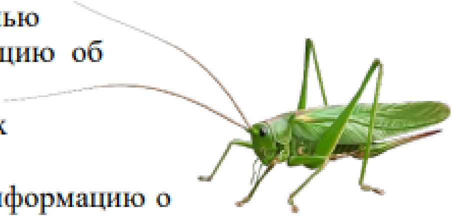
В журнальной статье Леонид прочитал о нашествии саранчи на поле подсолнечника. В статье было указано, что скорость полёта саранчи составила 12 км/ч.

Верно ли, что скорость полёта саранчи была меньше <u>средней скорости</u> полёта кузнечика?

○ Верно
○ Неверно

Объясните свой ответ.

ЗЕЛЁНЫЙ КУЗНЕЧИК



Леонид интересуется жизнью кузнечиков. Он собирает информацию об области обитания, условиях проживания, питания, особенностях поведения.

Леонид решил представить информацию о зелёном кузнечике в таблице.

Кузнечик зелёный

Характеристика	Среднее значение
Длина тела взрослого кузнечика	28 мм
Скорость полёта	30 м/мин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ (5 класс)
Характеристики заданий и система оценивания

ЗАДАНИЕ 1. ЗЕЛЁНЫЙ КУЗНЕЧИК (1 из 3). МФГ_МА_5_024_01_А6	
ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЯ: • **Содержательная область оценки:** количество • **Компетентностная область оценки:** применять • **Контекст:** научный • **Уровень сложности:** низкий • **Формат ответа:** задание с выбором одного верного ответа • **Объект оценки:** находить долю числа, выполнять действия с натуральными числами • **Максимальный балл:** 1	
Система оценивания:	
Балл	**Содержание критерия**
1	Отмечен ответ четвёртый (7).
0	Другой ответ или ответ отсутствует.

ЗАДАНИЕ 2. ЗЕЛЁНЫЙ КУЗНЕЧИК (2 из 3). МФГ_МА_5_024_02_А6	
ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЯ: • **Содержательная область оценки:** количество • **Компетентностная область оценки:** применять • **Контекст:** общественный • **Уровень сложности:** средний • **Формат ответа:** задание с несколькими краткими ответами • **Объект оценки:** переводить единицы длины, выполнять действия с натуральными числами • **Максимальный балл:** 2	
Система оценивания:	
Балл	**Содержание критерия**
2	Вписаны в пропуски в таблице два числа: 5 мм (длина при рождении) и 560 мм (длина прыжка).
1	Верно вписано в пропуски в таблице одно из чисел, а второе число либо отсутствует, либо указано неверное число.
0	Другой ответ или ответ отсутствует.

ЗАДАНИЕ 3. ЗЕЛЁНЫЙ КУЗНЕЧИК (3 из 3). МФГ_МА_5_024_03_А6	
ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЯ: • **Содержательная область оценки:**изменение и зависимости • **Компетентностная область оценки:** формулировать • **Контекст:**научный • **Уровень сложности:**высокий • **Формат ответа:**комплексное задание с выбором ответа и объяснением • **Объект оценки:** сравнивать скорости, выраженные в разных единицах, переводить единицы скорости • **Максимальный балл:** 2	
Система оценивания:	
Балл	**Содержание критерия**
2	Отмечен ответ «Неверно» и приведено объяснение, которое его подтверждает. Например, Скорость саранчи: 12 км/ч= 12000 : 60 м/мин = 200 м/мин > 30 м/мин (кузнечик). ИЛИ Скорость саранчи = 200 м/мин больше скорости кузнечика – 30 м/мин. Если ответ «Неверно» не отмечен, но он следует из приведённого верного объяснения, то балл не снижается.
1	Отмечен ответ «Неверно», приведено объяснение неполное, но в нем нет неверных утверждений.
0	Другой ответ или ответ отсутствует, включая случай, когда отмечен верный ответ «неверно», а объяснение отсутствует или неверное.

Научное издание

МАТЕМАТИКА.
РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Методическое пособие для учителя

Под редакцией Л. О. Рословой

101000, г. Москва, ул. Жуковского, д.16
Центр редакционно-издательской деятельности ФГБНУ ИСРО РАО
Тел. +7(495)621-33-74
info@instrao.ru
https://instrao.ru

Подготовлено к изданию 15.09.22.
Формат 60х90 1/8.
Усл. печ. л. 16,5.