



Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

**ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Интерактивные лабораторно-практические работы

Учебный предмет «МАТЕМАТИКА»

Углублённый уровень

10–11 класс

Методические рекомендации для учителей

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение | 4 |
| Раздел 1. Методические рекомендации по организации интерактивных лабораторно-практических работ по математике в 10–11 классах | 5 |
| 1.1. Понятие “лабораторно-практическая работа” как средства организации познавательной деятельности учащихся в обучении математике | 5 |
| 1.2. Планируемые результаты выполнения лабораторно-практических работ по учебному предмету «Математика» ... | 7 |
| 1.3. Общие методические рекомендации по организации процесса выполнения лабораторно-практических работ учащимися ... | 10 |
| Подведение итогов | 12 |
| Раздел 2. Система интерактивных лабораторно-практических работ по учебному предмету «Математика», 10–11 класс ... | 13 |
| 2.1. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков» | 14 |
| 2.2. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств показательной функции и её графика» | 19 |
| 2.3. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств логарифмической функции и её графика» | 23 |
| 2.4. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств функций с модулем и их графиков» | 27 |
| 2.5. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств «кусочной» функции и её графика» | 37 |
| 2.6. Лабораторная работа «Решение задач с использованием графика функции произвольного многочлена» | 31 |
| 2.7. Лабораторная работа «Решение математических и прикладных задач с помощью производной» | 44 |
| 2.8. Лабораторная работа «Решение задач на применение комплексных чисел» | 35 |
| 2.9. Лабораторная работа «Решение математических и прикладных задач с применением интегралов» | 44 |
| 2.10. Лабораторная работа «Решение задач на нахождение площади сечения многогранников и тел вращения» | 47 |
| Подведение итогов | 50 |

| | |
|---|----|
| Литература для учителя | 51 |
| Приложение | 53 |
| Приложение 1. Нормативно-правовое обеспечение организации деятельности учащихся при обучении учебному предмету «Математика» на уровне среднего общего образования | 53 |
| Приложение 2. Сокращения, используемые в пособии | 65 |

ВВЕДЕНИЕ

Организация обучения учебному предмету «Математика», базирующаяся на Федеральных государственных образовательных стандартах общего образования, должна быть направлена на реализацию примерных рабочих программ по математике, ориентированных на личностное и познавательное развитие обучающихся, овладение ими ключевыми компетенциями, являющимися основой для саморазвития и самосовершенствования, непрерывного образования. Одним из средств организации деятельности, способствующей достижению планируемых результатов обучения, являются лабораторные и практические работы. В школьном образовании эти формы работы учащихся достаточно широко используются при обучении учебным предметам естественнонаучного цикла, например, биологии, химии и физики. Организация обучения математике в большей степени традиционно ориентирована на формирование у учащихся предметных умений и знаний, в частности, умений решения текстовых задач, выполнения равносильных и тождественных преобразований выражений, решения уравнений или неравенств и их систем. Поэтому в призме обновления содержания учебного предмета «Математика» на уровне общего образования и достижения планируемых результатов в направлении личностного развития учащихся, метапредметных и предметных результатов обучения особый акцент приобретает деятельность обучающихся способствующая формированию математической функциональной грамотности, исследовательских умений, становлению представлений о математике и её методах, как средства познания действительности. Одним из путей организации такой деятельности являются лабораторно-практические работы, которые целесообразно включить в обучение разным курсам учебного предмета «Математика». Это будет способствовать не только развитию выше указанных результатов обучения, но и формированию понимания прикладной значимости математики, как науки.

**РАЗДЕЛ 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИНТЕРАКТИВНЫХ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ
РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ В 10–11 КЛАССАХ**

**1.1. Понятие “лабораторно-практическая работа” как средства организации
познавательной деятельности учащихся
в обучении математике**

В педагогической энциклопедии национальной энциклопедической службы России (<https://didacts.ru/about.html>) представлены определения понятий “лабораторная работа”, “практическая работа” и “лабораторно-практическая работа” из разных источников (табл. 1).

Таблица 1

Определения понятий “лабораторная работа” и “практическая работа”

| <i>Понятие</i> | <i>Определение понятия</i> |
|---------------------------------|---|
| Лабораторная работа | метод обучения, построенный на опытах с использованием приборов, инструментов и приспособлений, при котором учащиеся ведут наблюдения, анализируют, сопоставляют полученные данные и делают выводы [Педагогический тезаурус, 2016 г.] |
| | метод обучения, представляющий собой вид самостоятельной учебной деятельности, в ходе которой учащиеся выполняют опыты, измерения, элементарные исследования, подтверждающие изучаемые теоретические положения [Терминологический словарь-справочник по психолого-педагогическим дисциплинам] |
| | комплексная система упражнений с элементами программирования ... Организация Л. р. определяется количеством часов, наличием соответствующей техники и учебных материалов. Л. р. включают тренировочные и творческие упражнения [Новый словарь методических терминов и понятий (теория и практика обучения языкам)]. |
| Практическая работа | форма учебного занятия, целью которого является формирование у студентов практических навыков и умений [Качество образования. – Словарь для студентов 2 курса отделения социальной педагогики] |
| Лабораторно-практическая работа | (лат. <i>laborare</i> – работать, гр. <i>praktikos</i> – деятельный) – организационная форма (метод) профессионального обучения [Профессионально-педагогические понятия. Словарь. 2005] |

В результате анализа и сравнения определений выявлено, что лабораторные и практические работы являются одним из средств организации деятельности, способствующей достижению планируемых результатов обучения.

Синтез понятий “лабораторная работа” и “практическая работа” (табл. 1) позволяет говорить о лабораторно-практических работах в обучении математике, которые стоят на стыке теоретического и практического изучения учебного предмета «Математика» и являются средством интеграции теории в практическую деятельность. Такой подход к определению понятия “лабораторно-практические работы” в обучении математике влияет на тематику и содержание лабораторно-практических работ, их поэтапное включение в обучение теме, приёмы и методы, используемые учителем для руководства деятельностью обучающихся.

Виды работ. В содержание лабораторно-практических работ по математике включены учебно-познавательные задания и задачи; математические, контекстные и практико-ориентированные задачи, соответствующие конкретной теме. Тематическое содержание лабораторно-практических работ и основные используемые действия, в частности универсальные познавательные действия, при выполнении заданий и решении задач позволяет охарактеризовать виды работ:

- исследование свойств функций и их качественных зависимостей от параметров, входящих в аналитическую модель функции;
- исследование и описание зависимости характеристических преобразований графиков функций от значений параметров, входящих в аналитическую модель функции;
- применение функций и их свойств для решения математических и практико-ориентированных задач;
- изучение применения комплексных чисел при решении задач;
- исследование применения интеграла для решения математических и прикладных задач;
- исследование нахождение площади сечения многогранников и тел вращения.

Дидактическая цель. В зависимости от дидактической цели лабораторно-практической работы при изучении конкретной темы учебного курса учебного предмета «Математика» организация её проведения осуществляется на разных этапах изучения темы.

Учитель может провести лабораторно-практическую работу *исследовательского характера*. В этом случае выполнение лабораторно-практической работы или какого-то отдельного её структурного элемента включается в образовательный процесс до изучения теоретического материала темы. Учащимся неизвестны закономерности, свойства, выводы, которые описаны в учебнике. Учитель с помощью элемента лабораторно-практической работы создаёт проблемную ситуацию, мотивирует учащихся на изучение

соответствующего материала, организует открытие учащимися новых знаний и формирование умений их применения при решении задач. Учащиеся в процессе проведения исследования, эксперимента приобретают новые знания и умения.

Лабораторно-практическая работа может иметь *иллюстративный характер*. В этом случае выполнение заданий работы ориентировано на уже известный учащимся теоретический материал. Учителем на уроках или учащимися при самостоятельной работе с учебником уже установлены причинно-следственные связи, выявлены закономерности. В этом случае происходит расширение и углубление знаний, развитие и совершенствование умений его применения для решения задач.

Форма проведения. Организовать проведение лабораторно-практической работы, её структурных элементов учитель может при фронтальной, групповой или индивидуальной работе учащихся. При *фронтальной форме* обучающиеся одновременно выполняют одинаковые задания. В процессе выполнения или после него учитель организует фронтальное обсуждение проблематичных моментов, возникших у обучающихся, полученных результатов. При *групповой* или *индивидуальной форме* работы учащиеся выполняют задания в соответствии с инструкциями и рекомендациями, входящими в содержание заданий, работы.

Отчет о проведении работы. Выполнение интерактивных лабораторно-практических работ фиксируется интерактивной средой лабораторной работы в *лабораторном журнале*, который является своеобразным отчетом обучающихся о выполненной деятельности. Учитель, базируясь на лабораторный журнал, может предложить учащимся в качестве домашнего задания поработать с журналом и выявить самостоятельно причины затруднений выполнения заданий, оценить качество выполнения заданий, затем на уроке организовать обсуждение результатов.

Такой подход к понятию “лабораторно-практическая работа” и к организации выполнения работ учащимися позволяет использовать интерактивные лабораторно-практические работы в качестве средства организации познавательной деятельности учащихся в обучении математике.

1.2. Планируемые результаты выполнения интерактивных лабораторно-практических работ по учебному предмету «Математика»

Планируемые результаты выполнения лабораторно-практических работ базируются на требованиях Федеральных государственных образовательных стандартах общего образования к результатам обучения учебному предмету «Математика» и учитывают

развивающие направления математического образования, отражённые в Концепции развития математического образования в Российской Федерации (Приложение 1).

Конкретизируем планируемые результаты выполнения интерактивных лабораторно-практических работ в направлении личностного развития учащихся и в направлении достижения метапредметных результатов на уровне умений, в соответствии планируемым результатам, сформулированным в примерных рабочих программах по математике среднего общего образования на углублённом уровне (Приложение 1). Планируемые предметные результаты выполнения ЛПР представим в рамках описания каждой лабораторно-практической работы (см. пособие, раздел 2).

Результаты в направлении личностного развития учащихся

- Ценностное отношение к сформированным знаниям и умениям специфичных предмету «Математика» через осознание их использования в других областях науки, технологиях, экономики.
- Осознание практического применения достижений математики как науки при решении практико-ориентированных задач.
- Эстетическое отношение к построению рассуждений, решению задач, записи доказательств через корректно оформленные задания.
- Осознание возможности применения математических знаний для решения задач в области окружающей среды через решение практико-ориентированных задач с экологическим содержанием.
- Готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность как средством получения новых математических знаний.
- Осознание использования проектно-исследовательской деятельности как средства познания мира через выполнение контекстных заданий.

Метапредметные результаты

Универсальные познавательные действия

Базовые логические действия

- Умение характеризовать существенные признаки математических объектов, в том числе функций, многогранников и тел вращения, выявлять математические закономерности, свойства функций на основе наблюдений и эксперимента.
- Умение устанавливать справедливость высказываний, формулировать и преобразовывать суждения в процессе сравнения и анализа высказываний и суждений, представленных в заданиях.

- Умение построения логически верной цепочки умозаключений при доказательстве математического факта или в процессе решения задачи.

- Умение формулировать выводы с использованием законов логики, аналогичные умозаключения.

Базовые исследовательские действия

- Умение проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

- Умение самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.

- Умение выполнения самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи и контекстной задачи.

- Умение оценивания выполненной деятельности и её результата поставленной цели через анализ оценивания верности выполненных заданий оценивающим функционалом лабораторной работы.

Работа с информацией

- Умение выявления данных, необходимых для решения задачи или для ответа на вопрос.

- Умение анализировать и интерпретировать информацию в соответствие с поставленной задачей.

- Умение представлять информацию графически.

- Умение оценивать соответствие информации по самостоятельно сформулированным критериям.

Универсальные регулятивные действия

Самоорганизация:

- Умение составлять план и алгоритм решения задачи в процессе сравнения и анализа плана лабораторных работ в целом и предписания для выполнения отдельного эксперимента.

- Умение выбирать путь и способ решения с учётом имеющихся ресурсов.

- Умение аргументировать выбор вариантов решения задания, базируясь на информацию, полученную при решении предыдущих заданий.

Самоконтроль:

- Умение выполнять познавательную рефлексию на основе осознания совершенных действий.

- Умение выполнять самопроверку, самоконтроль деятельности и её результата, в частности решения поставленной задачи.
- Умение оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения результатов деятельности.

Формирование умений *общения* и *сотрудничества универсальных коммуникативных действий*, базируется на взаимодействии с учителем и одноклассниками в процессе фронтальной или групповой работы.

1.3. Общие методические рекомендации по организации процесса выполнения лабораторно-практических работ учащимися

Интерактивная лабораторно-практическая работа, как было отмечено выше, является одной из форм организации учебного процесса, средством организации познавательной деятельности учащихся в обучении математике.

Система интерактивных лабораторно-практических работ (ИЛПР) по учебному предмету «Математика» для 10–11 классов включает десять работ, которые тематически ориентированы на учебные курсы «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Функции и графики» и «Начала математического анализа».

Цель системы интерактивных лабораторно-практических работ по математике – развитие и совершенствование личностных и метапредметных результатов обучения математике через углубление, расширение и применение предметных знаний и умений.

Структура ИЛПР представлена несколькими блоками: мотивационное видео с интерактивным вопросом; теоретический материал; цель и задачи работы; система из трёх интерактивных электронных образовательных модулей (ИЭОМ) взаимосвязанных единой темой и целью лабораторно-практической работы; задания для итогового контроля; литература. Задания каждого модуля составляют единое целое с теоретическим и задачным материалом темы, расширяя и углубляя её содержание.

В зависимости от дидактической цели лабораторно-практическая работа и её структурные элементы могут иметь исследовательский или иллюстративный характер (п. 1.1. пособия). Например, с исследовательской дидактической целью могут быть использованы все структурные элементы лабораторно-практической работы, в частности, мотивационное видео с интерактивным вопросом, последний модуль работы; иллюстративный характер приобретает первый и второй модули после изучения

соответствующего учебного материала. Задания и задачи, составляющие содержание работ ориентированы на выполнение эксперимента, исследования, решение учебной, математической, практико-ориентированной или контекстной задачи.

Учитель в зависимости от дидактической цели проведения лабораторно-практической работы, основной (базовой) технологии, используемой при обучении той или иной теме, от подхода к организации процесса изучения учащимися учебного материала, может организовать проведение соответствующей лабораторно-практической работы или её интерактивных модулей на разных этапах изучения темы. Например, учитель может организовать выполнение элементов (заданий, модулей) работы предвосхитив изучение тематического теоретического материала, тем самым создав проблемную ситуацию. После изучения учебного материала соответствующего выполненным элементам до его изучения учащимися учитель организует повторное выполнение элементов работы. Такой подход повышает мотивацию учащихся к изучению темы в целом, раскрывает перед учащимися взаимосвязь между теоретическим материалом и практическими заданиями.

Интерактивные лабораторно-практические работы могут проводиться в процессе изучения темы, являясь составляющей системы средств обучения теме. Например, после изучения части учебного материала по теме учитель в качестве домашнего задания предлагает учащимся просмотреть мотивационное видео и ответить на интерактивный вопрос, входящий в него. На следующем уроке учитель организует обсуждение и анализ информации, содержащейся в видео. Предлагает совместно найти ответы на заранее подготовленные учителем вопросы или вопросы, которые возникли у учащихся в процессе просмотра видео. При этом часть вопросов взаимосвязана с тем или иным модулем лабораторной работы. Такой подход помогает учителю в руководстве деятельностью учащихся и в повышении мотивации учащихся выполнения работы через поиск ответов на вопросы.

Учитель может организовать проведение лабораторно-практических работ при завершении изучения темы. Таким образом, они будут средством обобщения и систематизации знаний и умений. При этом учитель организует самоанализ учащимися выполненной деятельности и её результатов, процесс выявления причины достижения или недостижения результатов деятельности и дальнейшего изучения темы.

Вводная и заключительная части лабораторно-практической работы проводятся фронтально, основная часть работы может проводиться как при фронтальной работе, так индивидуальной или групповой форме. В рамках заключительной части работы проводится: подведение общих итогов лабораторно-практической работы; обсуждение и оценивание результатов работы всех или отдельных учащихся; рекомендации учащимся в

направлении самостоятельного изучения темы, углублённого изучения темы или устранения пробелов в системе знаний.

На этапе подготовки к проведению лабораторно-практических работ могут быть разработаны учителем совместно с учащимися критерии оценки результативности выполнения работы. Например, критериями оценки результативности могут быть: степень реализации цели и задач работы; качество выполнения заданий; соответствие результатов работы заданным требованиям; сформированность у учащихся умений и знаний, соответствующих теме работы; личностная ценность информации, содержащейся в работе.

Учитель математики в подходе проведения лабораторно-практических работ в большей степени должен ориентироваться на организацию исследования, постановки проблемной задачи, когда учащийся самостоятельно выдвигает гипотезу и результатом выполнения работы является её подтверждение или опровержение.

Подведение итогов. Деятельность учащихся, способствующая формированию математической функциональной грамотности и исследовательских умений, становлению представлений о математике и её методах, как средства познания окружающего мира и решения задач реальных жизненных ситуаций, приобретает особый акцент в призме обновления содержания учебного предмета «Математика» на уровне общего образования и реализации примерных рабочих программ по математике. Одним из путей организации такой деятельности, как было отмечено выше, являются лабораторно-практические работы, которые целесообразно включить в обучение разным курсам учебного предмета «Математика» на уровне общего образования, в частности, при изучении учащимися 10–11 классов учебных курсов «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия». В ходе лабораторных работ, являющихся одним из видов самостоятельной практической работы, у учащихся формируются метапредметные результаты обучения, в частности, функциональная математическая грамотность и познавательные УУД, которые необходимы им в дальнейшем обучении, в познании окружающего мира, природы и успешной личностной реализации в жизни.

РАЗДЕЛ 2. СИСТЕМА ИНТЕРАКТИВНЫХ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА», 10–11 КЛАСС

Каждая тема учебных курсов учебного предмета «Математика» в 10–11 классах обладает своей спецификой. Поэтому при конструировании интерактивных лабораторно-практических работ учитывались особенности содержания темы, возможности использования содержания для организации математической деятельности в интерактивном формате. Как было отмечено выше, каждая интерактивная лабораторно-практическая работа может стать основой для организации работы в разных формах и на разных этапах изучения теоретического тематического материала и формирования умения практического применения теоретического материала при решении математических и контекстных задач. Теоретический материал, предлагаемый в каждой работе, соответствует теме лабораторной работы, дополняет или расширяет теоретический материал учебника. Поэтому учитель может организовать самостоятельное изучение учащимися предлагаемого материала, или использовать его для актуализации знаний.

Цель системы интерактивных лабораторно-практических работ по математике – развитие и совершенствование личностных и метапредметных результатов обучения математике через углубление, расширение и применение предметных знаний и умений.

Приведём примеры интерактивных лабораторно-практических работ по учебному предмету «Математика» в 10–11 классах, конкретизируя методические рекомендации к организации действий учащихся при выполнении работ и описав более подробно содержание работ.

2.1. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Тригонометрические функции», 11 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков.

Задачи работы:

- 1) исследовать взаимосвязь свойств тригонометрических функций и их графиков;
- 2) исследовать характеристические свойства тригонометрических функций;
- 3) смоделировать процессы с помощью тригонометрических функций и решить задачи с использованием тригонометрических функций и их графиков.

Предметные результаты

на углубленном уровне изучения

Функции и графики

- Свободно оперировать понятиями: функция, тригонометрическая функция, способы задания тригонометрических функции; взаимно обратные тригонометрические функции, композиция функций; графики тригонометрических функций; выполнять элементарные преобразования графиков тригонометрических функций.
- Свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений тригонометрических функций, нули тригонометрических функций, промежутки знакопостоянства тригонометрических функций.
- Свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные тригонометрические функции, периодичность тригонометрических функций, промежутки монотонности тригонометрических функции, максимумы и минимумы тригонометрических функции, наибольшее и наименьшее значение тригонометрических функции на промежутке.
- Свободно оперировать понятиями: тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента.
- Использовать графики тригонометрических функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование взаимосвязи свойств тригонометрических функций и их графиков.

ИЭОМ № 2. Исследование характеристических свойств преобразований графиков тригонометрических функций.

ИЭОМ № 3. Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

Мотивационное видео представляет области науки и сферы повседневной жизни, в которых используется математический аппарат тригонометрии. Например, тригонометрические вычисления применяются в геометрии, физике и инженерном деле, с

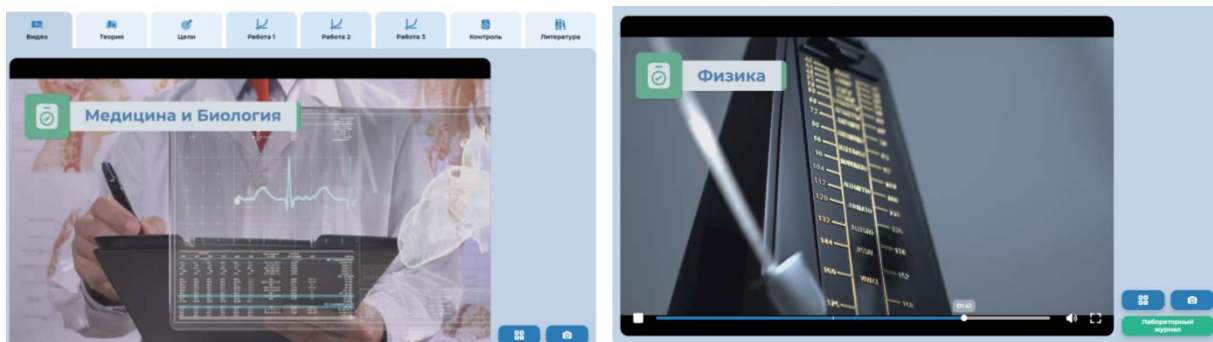


Рис. 1.

графиками тригонометрических функций сталкиваются геодезисты; сердцебиение происходит по принципу синусоиды, а модель биоритмов человека представляет собой графики тригонометрических функций. Таким образом, перед учащимися представлены примеры взаимосвязи математического аппарата тригонометрии, свойств и графиков тригонометрических функций с реальной жизнью и наукой (рис. 1).

Просмотр мотивационного видео может быть организован учителем на уроке или выполнен учащимися в рамках домашнего задания. После просмотра видео учитель организывает обсуждение учащимися полученной информации и осмысление её личностной ценности для каждого школьника.

В рамках *первого модуля* учитель организует исследование учащимися взаимосвязи свойств тригонометрических функций и их графиков. Используя инструменты ЭВЛПР, учащиеся строят графики тригонометрических функций, наблюдают за изменением их расположения на координатной плоскости в зависимости от значения параметров, выявляют качественные изменения области определения и области значений функций в зависимости от увеличения или уменьшения значений параметров (рис. 2).

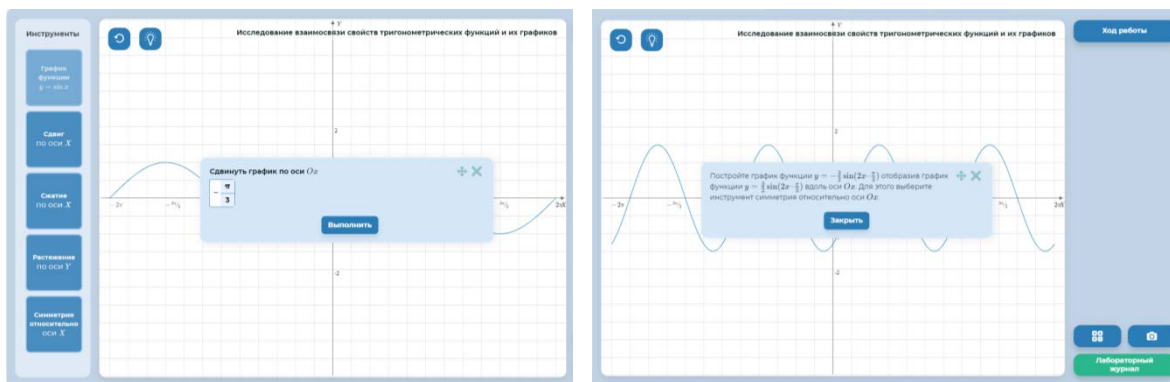


Рис. 2.

Учитель обращает внимание учащихся, что изучать функцию можно разными путями (способами): а) построить график и описать свойства функции, прочитав график; б) использовать аппарат математического анализа. Тем самым при выполнении этой лабораторной работы учитель акцентирует взаимосвязь её содержания с одним из направлений изучения учебного курса «Алгебра и начала математического анализа» – исследование функций. Целесообразно не просто отметить взаимосвязь, а создать для учащихся мотивационную ситуацию, ориентированную на повышение интереса к изучению теоретического материала, соответствующего лабораторной работе, на более тщательное выполнение заданий и появление ценностного отношения к результатам выполнения практических заданий.

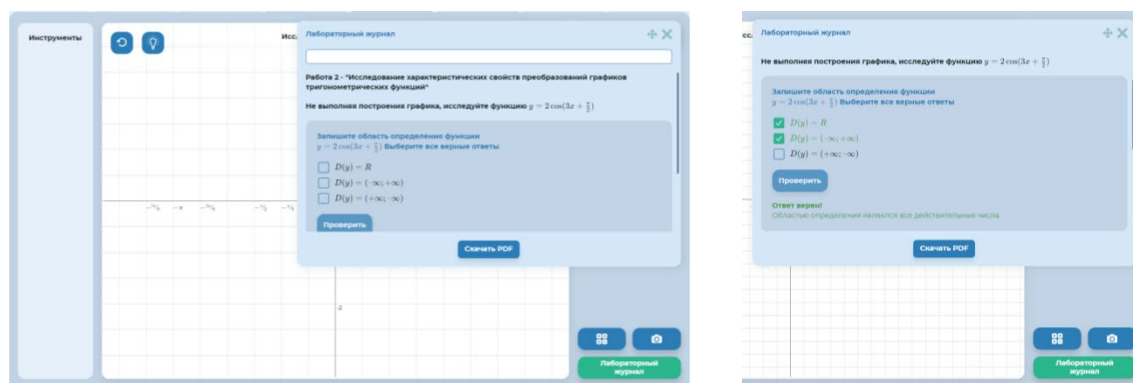
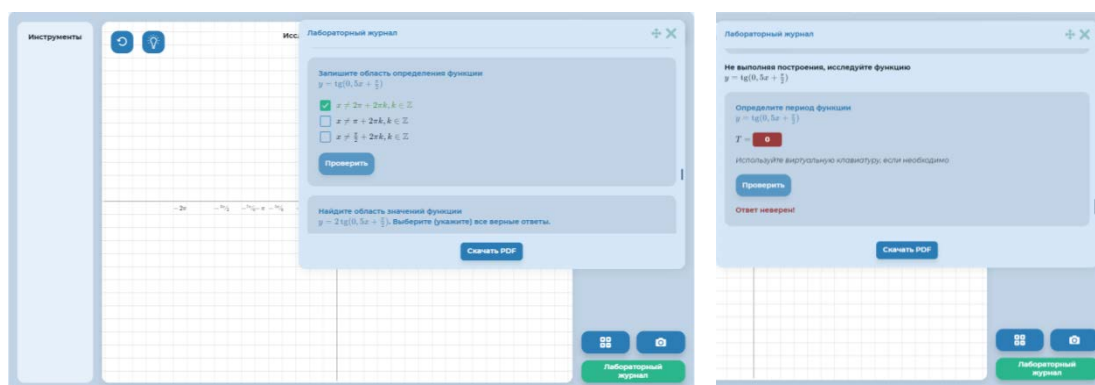


Рис. 3.

В рамках *второго модуля* учитель организует исследовательскую деятельность учащихся в направлении выявления свойств функции на основе характеристических свойств коэффициентов, влияющих на преобразования графиков тригонометрических функций без построения графика функции. Учащиеся выполняют задания, в основе которых лежит анализ аналитической модели функции. Результаты анализа они отражают в лабораторном журнале в форме записи ответа, выбора верного варианта ответа, на соотнесение (рис. 3).

При этом задание на выбор верного варианта ответа может содержать несколько верных вариантов, в которых, например, представлены разные формы записи промежутков, чисел.

Оценивающий функционал виртуальной лабораторной работы оценивает верность ответа данного учеником, комментируя его и руководя дальнейшей деятельностью школьника, предлагая следующее задание или рекомендуя повторить соответствующий теоретический материал (рис. 4).



Содержание заданий *третьего модуля* «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций» ориентировано на выполнение учащимися практико-ориентированных заданий, решение задач, описывающих реальные жизненные ситуации (рис. 5).

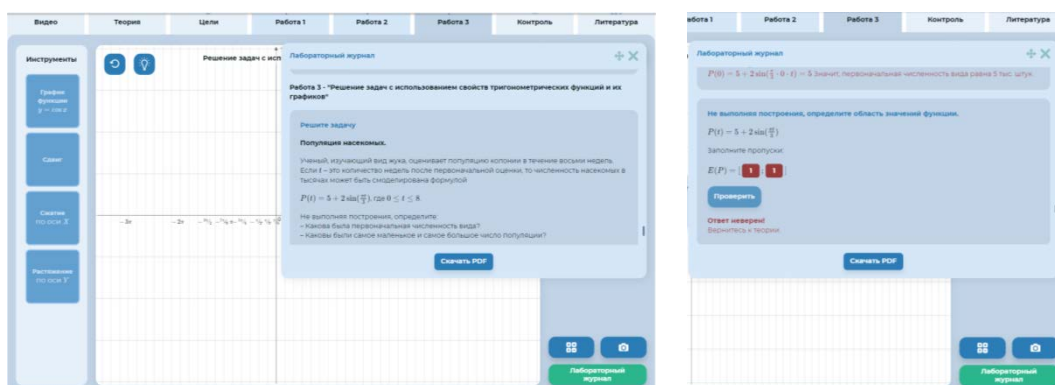
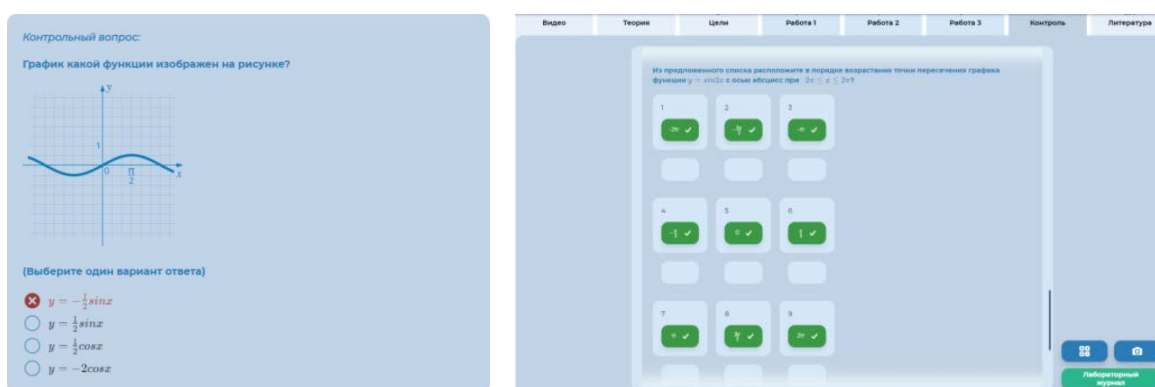


Рис. 5.

На этом этапе лабораторно-практической работы учителю целесообразно организовать деятельность учащихся не только в направлении расширения их теоретических знаний, но и деятельность, способствующую формированию и развитию функциональной математической грамотности. Базируясь на содержании заданий и верности вариантов ответов учащихся, учитель организует обсуждение учащимися, направленное на выявление теоретического материала по теме «Тригонометрические

функции», используемого для поиска пути ответа на поставленный вопрос и выхода из проблемной ситуации, связанной с реальной жизнью.

Завершается лабораторно-практическая работа **контрольным тестом**, включающим десять заданий, соответствующих теме лабораторной работы. При выполнении заданий теста учащиеся, например, записывают полученные числовые данные с помощью клавиатуры, выбирают верный ответ из выпадающего списка вариантов, восстанавливают последовательность. Например, в одном из заданий дан график функции, не указано какой, и учащиеся на основе анализа графика должны выявить соответствующую аналитическую запись функции; в другом – по аналитической модели функции надо указать область значений этой функции; в следующем – необходимо восстановить последовательность одной из координат точки пересечения графика функции с осью абсцисс в порядке возрастания (рис. 6).



Используя результаты выполнения **Рис. 6** теста, учитель организует деятельность учащихся, направленную на формирование и развитие у учащихся умений самооценки деятельности целом и её результатов, планирования дальнейшего изучения темы.

2.2. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств показательной функции и её графика»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Функции и графики: показательная функция», 10 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с использованием свойств показательной функции и её графика.

Задачи работы:

- 1) исследовать взаимосвязь свойств показательной функции и её графика;
- 2) исследовать характеристические свойства преобразований графика показательной функции;
- 3) моделировать реальные процессы с помощью показательной функции и решать задачи с помощью свойств показательной функции и её графика.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Функции и графики

- Свободно оперировать понятиями: функция, показательная функция, способы задания показательной функции; взаимно обратные функции, композиция функций; график показательной функции; выполнять элементарные преобразования графиков показательных функций.
- Свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства.
- Свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
- Свободно оперировать понятиями: показательная функция, её свойства и график; использовать график показательной функции для решения уравнений.
- Использовать график показательной функции для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование общих и различных свойств функций.

ИЭОМ № 2. Построение графика функции с помощью преобразований исходного графика.

ИЭОМ № 3. Выявление особенностей процессов, которые можно описать с помощью показательной функции. Решение уравнения функциональным методом.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

В *мотивационном видео* раскрывается применение математического аппарата для проведения исследований в других областях науки: в биологии через описание реальных процессов окружающего мира, например, рост числа растений и размножение бактерий (рис. 7); в экономике на примере результатов исследования «Опыт о законе народонаселения...» английского экономиста Томаса Мальтуса (рис. 7).

Отмечается, что эти процессы можно описать с помощью показательной функции, которая также используется в физике для описания и изменения количества атомов радиоактивного вещества при распаде; в химии для изучения спонтанного изменения состава или внутренних нестабильных атомных ядер (закон радиоактивного распада).

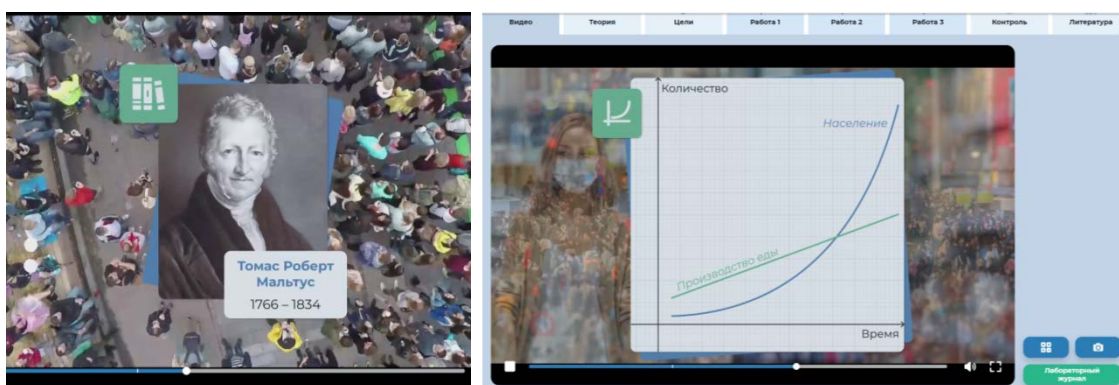


Рис. 7.

Просмотр мотивационного видео и выполнение интерактивного задания учитель организует на уроке открытия новых знания в начале изучения темы.

Первый модуль направлен на формирование умений построения графика показательной функции на основе исследования общих и различных свойств функций. Поэтому учитель организует его выполнение сразу после просмотра мотивационного видео. Учитель на *первом этапе* исследования организует построение учащимися графиков показательных функций: $y(x) = 3^x$; $y(x) = 2^x$ и др. в интерактивной среде лабораторно-практической работы (ИСЛПР). Сначала учащиеся заполняют таблицы, проставляя вычисленные координаты точек для каждой функции. Оценивающий функционал ИСЛПР отмечает верные и неверные варианты ответов (рис. 8). При неверном варианте вычисления

координат точек для построения графиков функции учитель и ИСЛПР рекомендует повторить теоретический материал.

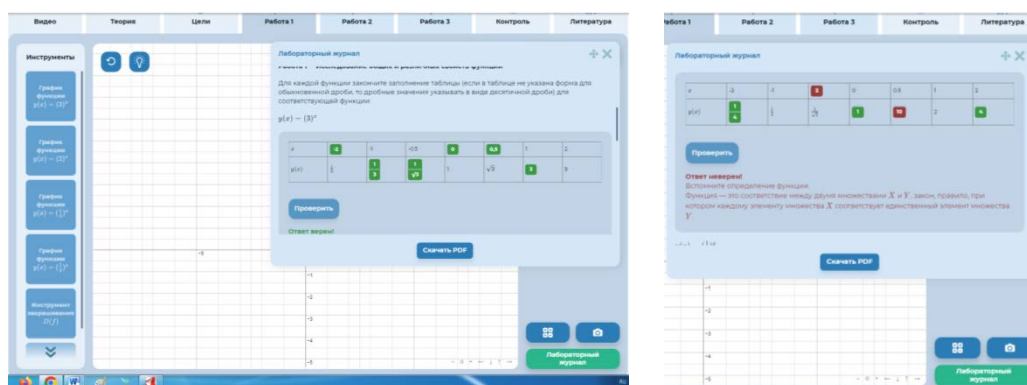


Рис. 8.

Затем учащиеся, используя заполненные таблицы, строят графики показательных функций (рис. 9).

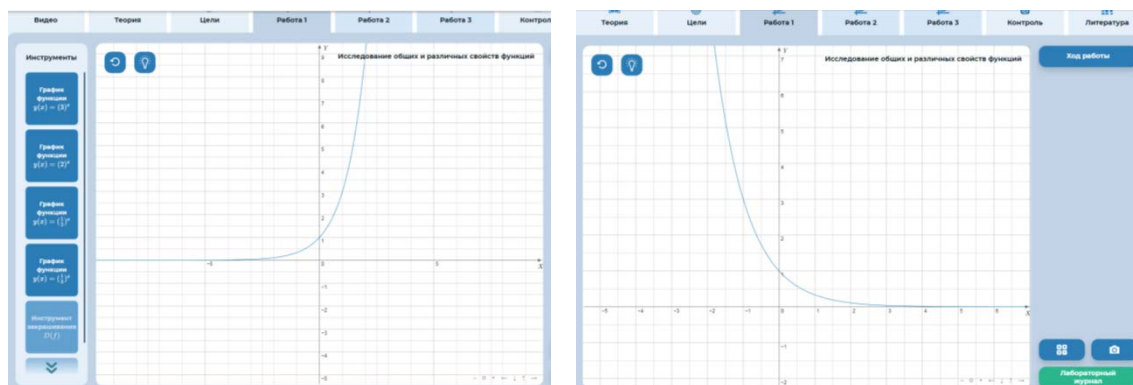


Рис. 9.

При этом в ИСЛПР имеется возможность исправления неверных значений координат. Кроме этого в ИСЛПР есть инструмент, с помощью которого учащиеся могут увеличить или уменьшить график, сместить систему координат вместе с графиком в более удобное положение.

Перед вторым этапом исследования учитель организует актуализацию умений чтения графика функции, так как это умение сформировано у учащихся в 7–9 классах при изучении других функций. Затем на *втором этапе* исследования учащиеся выявляют свойства показательных функций, графики которых построены. Обобщая выполненную деятельность, выявляют общие и различные свойства исследуемых функций, формулируют выводы при выполнении заданий.

Второй модуль направлен на проведение эксперимента, направленного на преобразования графика исходной функции. Сначала учащиеся выполняют преобразования графика заданной функции (рис. 10). Затем учащиеся анализируют построенный график (рис. 10) и при выполнении системы заданий эксперимента актуализируют знания о

параметрах (коэффициентов), о влиянии значений параметров на расположение графиков функций на плоскости должен выбрать инструмент. Результаты анализа обобщаются и формулируются выводы, например, выполняя задания по заполнению пропусков «График $y = 2^{x-1} - 3$ получается из графика $y = 2^x$ с помощью сдвига вдоль оси Ox на _____ единицу _____ и сдвига вдоль оси Oy на _____ единицы _____».

Дальнейшие действия учащихся связаны с построением графика функции с модулем путём комбинации преобразования графика базовой функции.

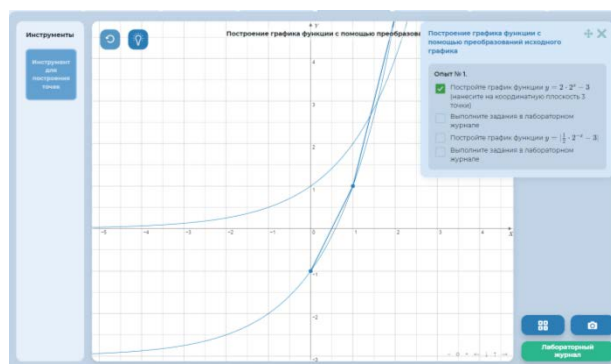


Рис. 10.

Содержанием **третьего модуля** являются контекстные и практико-ориентированные задачи, математическая модель которых связана с показательной функцией. Для выполнения этих заданий учащимся необходимы знания о свойствах и графиках показательной функции. Поэтому учитель организует выполнение этого модуля в конце или после изучения темы, связанной с показательной функцией. Также в содержание включены математические задания на решение уравнений с использованием свойств показательной функции.

Лабораторно-практическая работа завершается **контрольным тестом**, задания которого аналогично третьему модулю включают математические, практико-ориентированные и контекстные задачи.

После выполнения заданий третьего модуля и контрольного теста учитель еще раз акцентирует внимание учащихся на прикладное значение математических знаний и умений, в частности знаний о свойствах и графике показательной функции.

2.3. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств логарифмической функции и её графика»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Функции и графики: логарифмическая функция», 10 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с использованием свойств логарифмических функций и их графиков.

Задачи работы:

- 1) исследовать взаимосвязь свойств логарифмической функции и её графика;
- 2) исследовать характеристические свойства преобразований графика логарифмической функции;
- 3) смоделировать реальные ситуации с помощью логарифмической функции и решить задачи с помощью свойств логарифмической функции и её графика.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Функции и графики

- Свободно оперировать понятиями: функция, логарифмическая функция, способы задания логарифмической функции; взаимно обратные функции, композиция функций; график логарифмической функции; выполнять элементарные преобразования графиков логарифмических функций.
- Свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства.
- Свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
- Свободно оперировать понятиями: логарифмическая функция, её свойства и график; использовать график логарифмической функции для решения уравнений.
- Использовать график логарифмической функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование взаимосвязи свойств логарифмических функций и их графиков.

ИЭОМ № 2. Исследование характеристических свойств преобразований графиков логарифмических функций.

ИЭОМ № 3. Моделирование процессов с помощью логарифмических функций и решение задачи с использованием логарифмических функций и их графиков.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

В *мотивационном видео* отмечается, что многие природные явления можно описать с помощью логарифмической зависимости и при составлении математической модели определённого явления часто используют логарифмическую функцию. Описываются проявления логарифмов в живой природе и повседневной жизни, например, раковина улитки или нить паутины некоторых видов пауков закручены в логарифмическую спираль. Кроме этого отмечено, что человеческий организм воспринимает и «логарифмирует» ощущения. Зрение, уровень звукового восприятия, электрическая активность нейронов головного мозга - все это можно описать с помощью логарифмов.

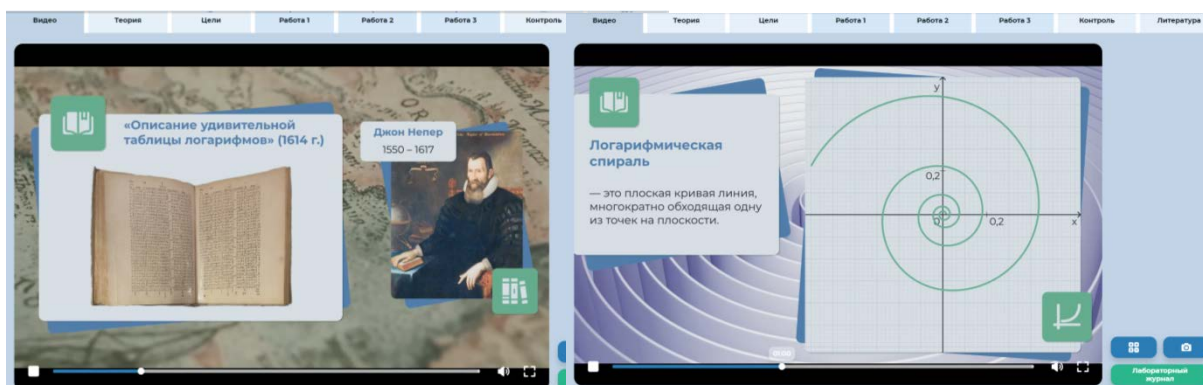


Рис. 11.

Работу учащихся с мотивационным видео учитель может организовать, используя технологию “перевернутого класса”, предложив его просмотр в качестве домашнего задания, и задав дополнительное задание – поиск информации о проявлении логарифмической функции в живой природе и использовании функции в других областях науки. На следующем занятии учитель организует фронтальное обсуждение информации, содержащейся в видео и найденной информации при выполнении дополнительного задания.

В рамках *первого модуля* проводится исследование, направленное на выявление взаимосвязи свойств логарифмических функций и их графиков. В завершении исследовательской работы в этом направлении учащимся предлагается построить график

$$\text{функции } y = \log_3 \frac{9}{6-3x} + 0,5 \log_3 (x - 2)^2$$

Работа с этим модулем может быть организована на этапе введения нового учебного материала. Если учащиеся класса имеют достаточно высокий уровень математической подготовки, изучают математику на углублённом уровне и ориентированы на сдачу профильного уровня государственной итоговой аттестации, то можно организовать выполнение первого модуля или его элементов в форме самостоятельной работы на уроке (или дома). Если в классе есть учащиеся, испытывающие затруднения в связи с недостаточным уровнем сформированности умений выполнять преобразования графиков функций, то учитель руководит деятельностью этих учащихся или организывает взаимопомощь в рамках групповой деятельности.

В содержание **второго модуля** включены задания на исследование характеристических свойств преобразований графиков логарифмических функций, задания на решение графическим способом уравнений, например функции $y = ||\log_{\frac{1}{2}}(x - 2)| - 1|$, уравнения $\log_7(x + 2) = \log_{49}x^4$, ориентированы на изучение математики на углублённом уровне. Целесообразно в содержание урока включить аналогичные задания, чтобы действия анализа функций и решения уравнений в процессе решения развивались и становились умениями решения таких уравнений, как, например,

$$1) \log_2(2 - x) - \log_2(2 - \sqrt{x}) = \log_2(\sqrt{2 - x}) - 0,5;$$

$$2) 5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{0,25} x-1} = \frac{26}{5};$$

$$3) \log_{12}(4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x \log_{12} 27.$$

Третий модуль направлен на формирование умений моделирования реальных процессов с помощью логарифмических функций и решение задачи с использованием логарифмических функций и их графиков. Например, условие одной из задач описывает деятельность ученого (рис. 12), второй – профессиональную ситуацию из работы водолазов.

Работа 3 - "Моделирование процессов с помощью логарифмических функций и решение задачи с использованием логарифмических функций и их графиков"

Решите задачу

Численность бактерий. Ученый, изучающий один из видов бактерий, оценивает скорость роста в течение t недель. Он заметил, что рост численности этих бактерий можно описать законом:
 $S = 3 + \log_2(t + 2)$, где
 S — численность бактерий в тысячах, а t — количество недель.
 Какой была первоначальная численность бактерий?
 Вычислите значение функции при $t = 0$
 $S = 3 + \log_2(t + 2)$.

$S(0) =$

Рис. 12.

После решения целесообразно организовать беседу об использовании математического аппарата для решения прикладных задач, а также в направлении

профориентации учащихся. Математическая задача этого модуля – логарифмическое уравнение с параметром, которые относятся к заданиям повышенного и высокого уровня сложности.

Учитель включает выполнение заданий этого модуля в содержание заключительных уроков изучения темы на углублённом уровне, так как для этого требуются сформированность умений решения на высоком уровне.

В процессе решения заданий *контрольного теста* учитель организует обобщение и систематизацию знаний учащихся,

Отметим, что решение заданий лабораторной работы не только оценивается, но и приводится комментарий в виде рассуждения при поиске решения задачи или решение, представляющее логически верную построенную цепочку рассуждений (рис. 13).

Ответ верен!
Задача сводится к решению уравнения $A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5,75$, температуры воздуха $T = 300\text{К}$, количества вещества воздуха $v = 3$ моль и объема воздуха $V_1 = 8\text{л}$:
 $5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350$
 $\log_2 \frac{8}{V_2} = 2$
 $\frac{8}{V_2} = 4$
 $V_2 = 2$

Найдите S_{max} за 30 недель наблюдения

8 тысяч

Ответ верен!
Т.к. логарифмическая функция является бесконечно возрастающей, то можно сделать вывод, что при $t = 30$ значение функции будет максимальным.
 $S_{max} = 3 + \log_2(30 + 2) = 3 + 5 = 8$

Рис. 13.

Целесообразно, используя комментарий, организовать деятельность в направлении формирования личностных результатов обучения у учащихся, а именно формирование эстетического отношения к построению рассуждений, решению задач, записи доказательств через корректно оформленные задания.

2.4. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств функций с модулем и их графиков»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Функции и графики», 10–11 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с использованием свойств функций с модулем и её графика.

Задачи работы:

- 1) исследовать принципы построения графиков функции с модулем;
- 2) исследовать взаимосвязь свойств функции с модулем и её графика;
- 3) смоделировать реальные процессы с помощью функции с модулем и решить математические и прикладные задачи с применением свойств модуля и графика с модулем.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Функции и графики

- Свободно оперировать понятиями: функция, способы задания функции; взаимно обратные функции, композиция функций; график функции; выполнять элементарные преобразования графиков функций.
- Свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства.
- Свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
- Свободно оперировать понятиями: тригонометрическая, показательная и логарифмическая функции, свойства этих функций и их графики.
- Свободно оперировать понятиями: функция с модулем, её свойства и график; использовать график функции с модулем для решения уравнений.
- Использовать график функций с модулем для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование принципов построения графиков функции с модулем.

ИЭОМ № 2. Исследование взаимосвязи свойств функции с модулем и её графика.

ИЭОМ № 3. Моделирование реальных процессов с помощью функции с модулем и решить математические и прикладные задачи с применением свойств модуля и графика с модулем.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

В *мотивационном видео* раскрывается происхождение слова “модуль” и представлены случаи из реальной жизни, в которых это слово обозначает разные объекты, не связанные между собой внешним видом, формой или исполняющим функционалом, но характеризующиеся значением латинского слова “*modulus*”, от которого произошло слово “модуль”. Отмечается, что и в математике термин “модуль” в связи с другими терминами обозначает разные понятия, например, абсолютная величина, длина вектора, модули римановой поверхности.

Учащимся 10–11 классов уже знакомо понятие “функция с модулем”, они умеют строить графики функций с модулем, например, $y = |x|$ или $y = |x^2 - 4|$ (рис. 14). Поэтому учителю целесообразно организовать самостоятельное изучение учащимися мотивационного видео с последующим его обсуждением.

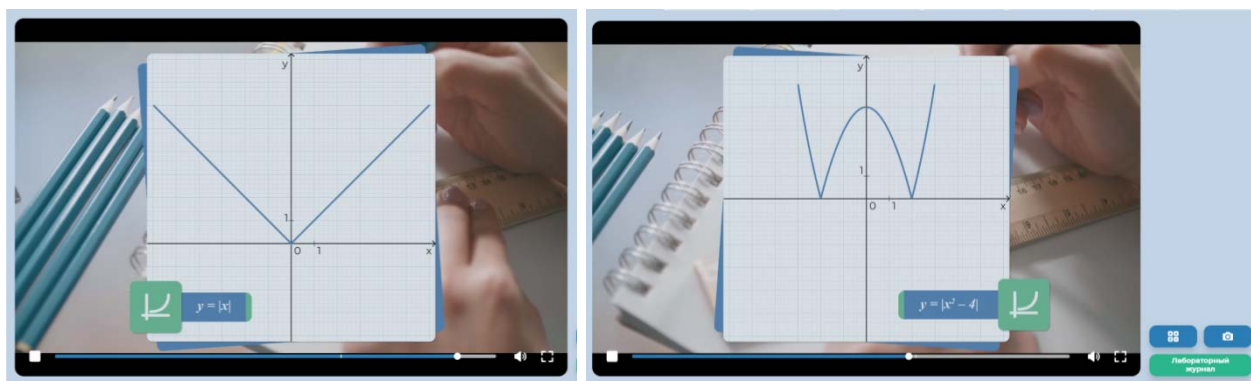


Рис. 14.

Первый модуль ИЛПР связан с построением графиков функций с модулем, базовой функцией которых является известная учащимся функция $y = |x|$. Поэтому на этом же этапе выполнения ИЛПР учитель организует самостоятельную работу учащихся по актуализации знаний о функции с модулем и правил построения её графика, используя материалы теоретического блока.

Целесообразно организовать самостоятельную индивидуальную или групповую работу учащихся и при выполнении заданий на построение графиков функций с модулем, с фронтальным обсуждением последовательности построения, например функций,

$$y = |2 - |1 - |x|||; y = |x + 1| - |x - 2|; y = |x| + |x - 1| + |x + 1|.$$

На базе актуализированных знаний учащиеся под руководством учителя выдвигают гипотезы, предположения о последовательности построения графика этих и аналогичных функций, составляют предписание для построения графиков функций с модулем.

В содержание *второго модуля* ИЛПР включены более сложные функции с модулем, базой которых, например, являются тригонометрические функции: $y = |\operatorname{ctg} \frac{x}{2}|$, $y = \operatorname{ctg} \frac{|x|}{2}$. Поэтому учитель может организовать выполнение заданий этого модуля при изучении учебного материала соответствующих тем.

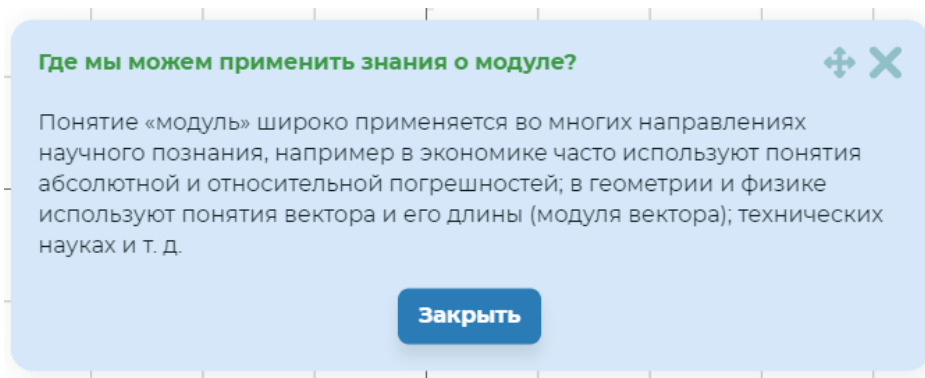


Рис. 15.

Учитель организует исследовательскую и экспериментальную деятельность учащихся, направленную на выявление свойств этих и аналогичных функций, построение графиков. Результатом этой деятельности является конкретизация свойств функций с модулем, алгоритм построения графиков функций с модулем.

Третий модуль ИЛПР направлен на решение математических и прикладных задач с применением свойств функций с модулем и их графика. Поэтому при работе с заданиями третьего модуля целесообразно организовать деятельность учащихся в направлении формирования функциональной математической грамотности. На первом этапе работы учитель создает проблемную ситуацию: «Где мы можем применить знания о модуле?». Учащиеся предлагают варианты применения знаний. На втором этапе, рассматривая конкретную задачу (рис. 16), учащиеся выявляют взаимосвязь функции с модулем с некоторыми величинами прикладных задач, например эластичности спроса. Использование задач аналогичных представленной раскрывает перед учащимися взаимосвязь функции с модулем с практико-ориентированными задачами.

Рассмотрим задачу на определение эластичности рынка. Рынок функционирует по определенным законам.

Знание этих законов является обязательным условием для того, чтобы понимать, почему под воздействием ценовых и неценовых факторов происходит изменение спроса и предложения. Эластичность спроса по цене определяется формулой:

$$E_d = |\Delta Q(\%) : \Delta P(\%)| = |(Q_2 - Q_1) : Q_1| : |(P_2 - P_1) : P_1|$$

Q_1 — первоначальный объем спроса,

Q_2 — настоящий объем спроса;

P_1 — первоначальная цена товара

P_2 — текущая цена товара

Ситуация. Цена некоторого товара увеличилась с 200 ед. до 800 ед., а объем спроса сократился с 6 т до 3 т. Определите степень эластичности товара. Сделайте **вывод**

Рис. 16.

После выполнения заданий контрольного теста учитель организует подведение итогов выполнения работы, обсуждение ее результатов, акцентируя внимание на прикладную функцию математики, как науки.

2.5. Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств «кусочной» функции и её графика»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Функции и графики», 10–11 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с использованием свойств кусочной функции и её графика.

Задачи работы:

- 1) исследовать принципы построения графиков «кусочной» функции;
- 2) исследовать взаимосвязь свойств «кусочной» функции и её графика;
- 3) смоделировать реальные ситуации с помощью «кусочной» функции и решить математические и прикладные задачи с применением свойств «кусочной» и её графика.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Функции и графики

- Свободно оперировать понятиями: функция, способы задания функции; взаимно обратные функции, композиция функций; график функции; выполнять элементарные преобразования графиков функций.
- Свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства.
- Свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
- Свободно оперировать понятиями: кусочная функция, её свойства и график; использовать график кусочной функции для решения уравнений.
- Использовать график кусочной функции для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование принципов построения графика кусочной функции.

ИЭОМ № 2. Исследование взаимосвязи свойств кусочной функции и её графика.

ИЭОМ № 3. Решение математических и прикладных задач с применением свойств кусочной функции и её графика.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

Мотивационное видео начинается с создания проблемной ситуации «Кусочные функции! Что это за функции?».

Учащимся, которые учились в 7–9 классах на углублённом уровне, уже может быть знакомо это понятие, а учащимся, которые стали изучать математику на углублённом уровне, начиная с 10 класса, это понятие может быть и не знакомо. Поэтому учитель, предвидя такую ситуацию, может организовать просмотр мотивационного видео по группам. В одну группу войдут учащиеся, которым не знакомо или мало знакомо понятие “кусочная функция”, во вторую – учащиеся, у которых сформировано знание этого понятия. После просмотра видео учитель организует обсуждение материала, в котором учащиеся первой группы обозначат проблемы с пониманием понятия “кусочная функция”, а учащиеся второй группы, опираясь на свой опыт, ответят на вопросы одноклассников.

В содержание **первого модуля** ИЛПР включены кусочные функции, сконструированные на основе функций, изученных в 7–9 классах, в частности, обратной пропорциональности, линейной и квадратичной (рис. 17). Поэтому работу с первым модулем учитель организует по группам или индивидуально, в зависимости от того, в какую группу входил учащийся на этапе изучения видео.

Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x \leq -2 \\ 2x, & \text{если } -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 9, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Следуя алгоритму построения графика кусочной функции, определим участки числовой прямой, на которых функция задана разными формулами

Закреть

Рис. 17.

Учащимся первой группы учитель оказывает консультационную поддержку, а также подключает к оказанию взаимопомощи одноклассников из второй группы.

В содержание **второго модуля** ИЛПР включены кусочные функции, сконструированные на основе функций, изучаемых в 10–11 классах, например, тригонометрических, логарифмических и показательных (рис. 18). Поэтому выполнение

заданий этого модуля целесообразно включить в изучение соответствующей темы в этих классах.

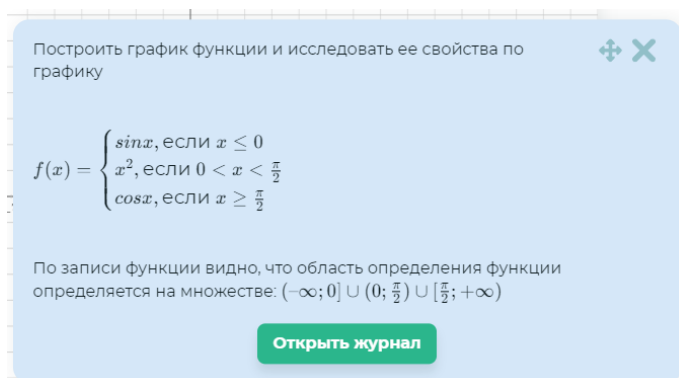


Рис. 18.

В курсе математики важно уметь не только строить графики кусочных функций, но и уметь «читать» график, т. е. по графику описывать свойства функций, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной). Поэтому при выполнении заданий учитель организует деятельность учащихся не только в направлении построения графика кусочной функции, но в направлении развития и совершенствования умений исследования кусочной функции по её графику.

В рамках *третьего модуля* раскрывается важность изучения кусочных функций на примерах их применения в решении прикладных и практико-ориентированных задач, например, задача об оплате посещения тренажерного зала (рис. 19).

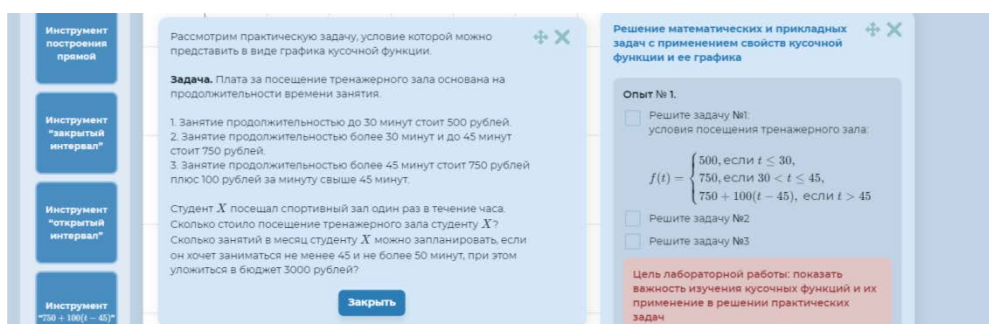


Рис. 19.

Поэтому целесообразно организовать решение задач модуля разными способами: аналитически и графически. Такой подход позволяет учителю организовать обсуждение решений и оценивание каждого из них, выявление наиболее информативного.

Лабораторно-практическая работа завершается *контрольным тестом*, который включает задания направленные на выявление сформированности понимания понятия “кусочная функция”, знаний и умений определения свойств кусочной функции по

аналитической модели и графику, знаний алгоритма построения графика кусочной функции.

Поэтому после прохождения теста учитель организует процесс самооценивания знаний и умений учащимися, выявления причин затруднений на основе анализа допущенных ошибок.

2.6. Лабораторная работа «Решение задач с использованием графика функции произвольного многочлена»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Функции и графики» и «Начала математического анализа».

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения задач с использованием графика функции произвольного многочлена.

Задачи работы:

- 1) исследовать качественные характеристики функции произвольного многочлена и принципы построения его графика;
- 2) исследовать возможности построения графика функции произвольного многочлена;
- 3) решить задачи с использованием графика функции произвольного многочлена.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Функции и графики

- Свободно оперировать понятием “функция” и понятиями, связанными с понятием “функция”.
- Строить графики композиции функций с помощью элементарного исследования и свойств композиции двух функций.
- Свободно оперировать понятиями: функция произвольного многочлена, её свойства и график; использовать график функции произвольного многочлена при решении задач.

Начала математического анализа

- Свободно оперировать понятиями: первая и вторая производные функции, касательная к графику функции.
- Вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции двух функций; знать производные элементарных функций.
- Использовать геометрический и физический смысл производной для решения задач.
- Использовать график функции произвольного многочлена для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование качественных характеристик функции произвольного многочлена и принципов построения её графика.

ИЭОМ № 2. Построение графика функции произвольного многочлена.

ИЭОМ № 3. Решение задач с использованием графика функции произвольного многочлена.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

Лабораторно-практическая работа ориентирована на использование в 11 классе, но некоторые структурные элементы могут быть использованы и в 10 классе, например мотивационное видео на этапе обобщения и структуризации знаний, полученных в 7–9 классах. В 11 классе *мотивационное видео* может предлагаться на этапе актуализации и мотивации, например, при изучении разделов «Функции и графики», «Производная». Целесообразно, используя видео и теоретический материал к ИЛПР, актуализировать знания учащихся об уже изученных многочленах и создать проблемную ситуацию, мотивирующую к изучению нового материала. Работа с интерактивным видео может быть организована как в режиме фронтальной работы, так и в качестве домашнего задания с последующим обсуждением его содержания и ответов на задание.

Первый модуль ориентирован на организацию учителем исследования качественных характеристик функции произвольного многочлена и принципов построения её графика. Исследование включает ряд практических заданий на выявление свойств функции произвольного многочлена, например, требуется найти критические точки, промежутки возрастания и убывания, выявить точками минимума и максимума.

В рамках *второго модуля* на основе исследования свойств функции произвольного многочлена учащиеся должны построить график. В ходе работы постепенно расширяются действия, которые учащиеся должны выполнить. Задания направлены не только на нахождение таких свойств как область определения функции и точек пересечения графика с осями координат, критических точек функции и интервалов монотонности функции, но и на исследование функции на локальный экстремум и построение графика функции, базируясь на полученных качественных характеристиках.

В рамках *третьего модуля* предлагается решить ряд задач с использованием графика функции произвольного многочлена. Таким образом, происходит расширение знаний и развитие умений их применения для решения конкретных задач, например решения уравнений графическим способом.

Содержание учебного материала всех модулей лабораторно-практической работы является обязательным для усвоения учащимися, независимо от уровня обучения. Так как при переходе от одного модуля к другому происходит углубление предметных знаний, расширение действий, которые учащиеся выполняют, постепенное усложнение заданий, то

целесообразно изучение модулей организовать в той последовательности, в которой они представлены. Их можно использовать как единое целое, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике.

2.7. Лабораторная работа «Решение математических и прикладных задач с помощью производной»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»: раздел «Исследование функций с помощью производной», 11 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с помощью производной.

Задачи работы:

- 1) установить связи между производной и свойствами функции;
- 2) развивать знания алгоритма исследования функции с применением производной и построения ее графика и умения его применения;
- 3) развивать умения использования производной для доказательства тождеств и неравенств;
- 4) развивать умения использовать производную для решения задач на оптимизацию.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Функции и графики

- Свободно оперировать понятием “функция” и понятиями, связанными с понятием “функция”.
- Строить графики композиции функций с помощью элементарного исследования и свойств композиции двух функций.

Начала математического анализа

- Свободно оперировать понятиями: первая и вторая производные функции, касательная к графику функции.
- Вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции двух функций; знать производные элементарных функций.
- Использовать производную для исследования функции на монотонность и экстремумы.
- Находить наибольшее и наименьшее значения функции непрерывной на отрезке.
- Использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование функций с помощью производной.

ИЭОМ № 2. Построение эскизов графиков с помощью производной.

ИЭОМ № 3. Решение математических и прикладных задач с помощью производной.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

На этапе мотивации изучения учебного материала по теме «Применение производной для исследования функций и построение графика функций» целесообразно создать проблемную ситуацию, предложив учащимся построить график функции произвольного многочлена по точкам. После построения учитель организует просмотр *мотивационного видео* и фронтальное обсуждение информации, содержащейся в нём, сравнение и анализ полученных графиков. Учащиеся планируют изучение темы.

В рамках *первого модуля* учитель организует исследование функций с помощью производной. Оно включает экспериментально-практические работы, направленные, например, на выявление с помощью производной монотонности функции, определение точек экстремума; исследование выпуклости графика и определение точек перегиба. Исследование целесообразно проводить в форме самостоятельной индивидуальной или групповой работы с последующим обсуждением результатов и сформулированных выводов, например, о связи между характером монотонности функции и знаком ее производной; о связи экстремальных точек и производной функции в этих точках. Результатом исследования являются знания у учащихся связи между свойствами функций и значениями их производных; самостоятельно составленный учащимися алгоритм нахождения промежутков монотонности функции с помощью производной.

Содержание *второго модуля* можно условно разделить на две части – теоретическую и практическую. Теоретическая часть направлена на систематизацию, расширение и углубление знаний об использовании производной, практическая – на формирование умений использования результатов, полученных при исследовании функции, для построения её графика. *Теоретическая часть*, включает, например, задания на выбор верного утверждения, на установку соответствия между утверждениями, на достраивание графика. Учитель может организовать выполнение этих и аналогичных заданий в форме фронтальной групповой работы учащихся, в частности, обсуждение предлагаемых вариантов и обоснование выбора того или иного варианта. *Практическая часть* представлена заданиями на отображение результатов исследования на координатной прямой или координатной плоскости и на построение графика функции на основе

графической интерпретации свойств функции. Эту часть работы учитель проводит при индивидуальной работе учащихся.

В содержание *третьего модуля* включены задачи, для успешного решения которых, необходимы знания и умения, сформированные на достаточно высоком уровне. Поэтому учитель организует выполнение этого модуля в заключение изучения темы «Производная». Работа направлена на развитие умений решения математических задач, в частности, на доказательство тождеств и неравенств с помощью производной, на нахождение наибольшего значения величины. Также, используя материалы модуля, учитель организует работу, способствующую развитию умений решения прикладных задач с помощью производной, формирование у учащихся умений составления схемы решения задач на отыскание наибольших или наименьших величин.

2.8. Лабораторная работа «Решение задач на применение комплексных чисел»

Место в изучении учебного курса «Алгебра и начала математического анализ»: раздел «Комплексные числа», 11 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения задач на применение комплексных чисел.

Задачи работы:

- 1) исследовать алгебраическую форму записи комплексных чисел и возможности арифметических действий с комплексными числами;
- 2) исследовать возможности геометрического представления и тригонометрической формы записи комплексных чисел;
- 3) решить задачи на применение комплексных чисел.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Числа и вычисления

- Свободно оперировать понятиями: комплексное число и множество комплексных чисел.
- Представлять комплексные числа в алгебраической и тригонометрической форме.
- Выполнять арифметические операции с ними и изображать на координатной плоскости.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Алгебраическая форма записи комплексных чисел и выполнение арифметических действий с комплексными числами.

ИЭОМ № 2. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

ИЭОМ № 3. Решение задач на применение комплексных чисел.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

Тема «Комплексные числа» новая для учащихся. Поэтому все модули целесообразно последовательно включать в содержание темы в соответствии с логикой её изложения, расширяя и углубляя её содержание.

На этапе открытия учащимися нового материала учитель организует самостоятельное изучение учащимися материалов *мотивационного видео* и теоретического материала к ИЛПР на уроке или в качестве домашнего задания. После этого рекомендуется обсудить полученную информацию, сделав акцент, на том что, множество комплексных чисел расширяет множество вещественных чисел, известное учащимся. Целесообразно в процессе обсуждения учителю обратить внимание на исторический аспект происхождения комплексных чисел, и отметить, что, комплексные числа применяются в других областях науки и технике, например теории крыла летательных аппаратов, расчёте параметров для сетей постоянного и переменного тока. Можно в качестве предшествующего домашнего задания предложить учащимся самостоятельно найти информацию о применении комплексных числах. Такой подход к организации этапа открытия учащимися нового знания будет способствовать формированию более глубокого понимания понятия “комплексные числа”.

Задания *первого модуля*, ориентированы на второй этап изучения темы. На этом этапе учитель выявляет уровень понимания учащимися понятия «комплексные числа»; организует деятельность учащихся, способствующую формированию у учащихся умений записи комплексного числа в разных формах, осознанного выполнения арифметических операций с комплексными числами.

Основное содержание *второго модуля* соответствует следующему этапу изучения темы «Комплексные числа» и направлено на формирование и развитие умений изображения комплексных чисел на координатной плоскости. Сначала учитель организует актуализацию знаний и умений выполнения действий сложения и вычитания векторов по правилу треугольника и параллелограмма, затем индивидуальную работу учащихся на координатной плоскости ИЛПР. Учащиеся выполняют построения (рис. 20) и фиксируют результаты экспериментальной работы в лабораторном журнале.

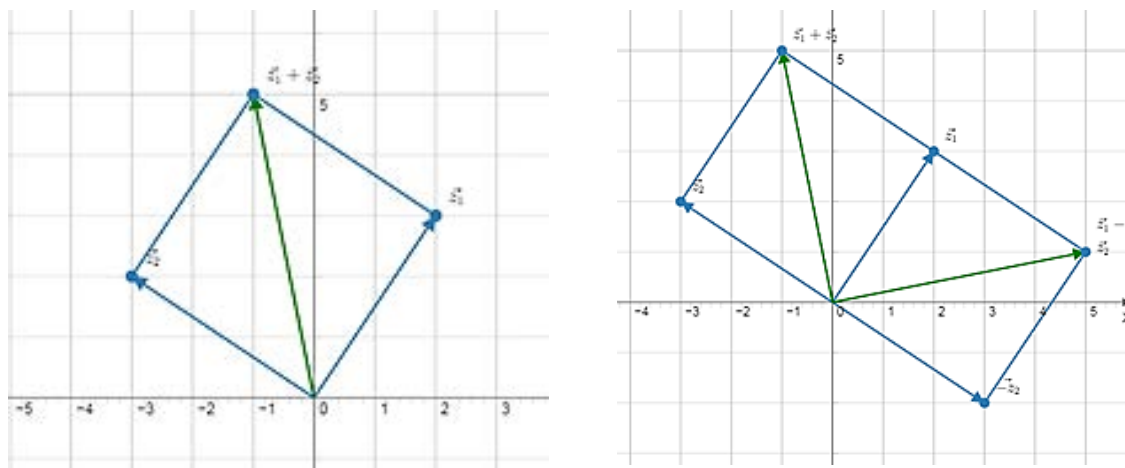


Рис. 20.

Третий модуль направлен на расширение средств обучения для организации процесса формирования и развития у учащихся умений применение комплексных чисел при решении задач, в частности извлечения корня n -ой степени из комплексного числа, решения квадратных уравнений, дискриминант которых меньше нуля. Например, учащимся предлагается решить уравнения: $z^2 + 8088 = 0$; $z^2 - 2z + 5 = 0$; разложить на множители квадратный трёхчлен: $4z^2 + 4z + 5$.

В содержание систематизации знаний по теме или подготовки к оцениванию сформированности теоретических знаний и практических умений учитель может включить выполнение *контрольного тестирования*, которое содержит задания на выбор верного варианта ответа, на формулирование понятий, связанных с понятием “комплексные числа”, выполнение действий с комплексными числами.

Также заданиями контрольного тестирования можно расширить систему заданий для организации самопроверки и самооценивания учащимися личностных знаний и умений их применения.

2.9. Лабораторная работа «Решение математических и прикладных задач с применением интегралов»

Место в изучении учебных курсов «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия»: разделы «Первообразная и интеграл», «Площади поверхности и объемы круглых тел», 11 класс.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения математических и прикладных задач с применением интегралов.

Задачи работы:

- 1) исследовать свойства определенного интеграла;
- 2) решить математические задачи с применением интегралов;
- 3) решить прикладные задачи с применением интегралов.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

Первообразная и интеграл. Площади поверхности и объемы круглых тел

- Свободно оперировать понятиями: первообразная, определённый интеграл; находить первообразные элементарных функций и вычислять интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.
- Решать математические задачи, в том числе вычислять площади плоских фигур и объёмы тел с использованием интеграла.
- Решать прикладные задачи естественнонаучной области с применением интегралов.

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Вычисление определенных интегралов.

ИЭОМ № 2. Решение математических задач с применением интегралов.

ИЭОМ № 3. Решение прикладных задач естественнонаучной области с применением интегралов.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

Содержание лабораторно-практической работы соответствует учебному материалу по теме «Определённый интеграл». Просмотр мотивационного видео, выполнение заданий системообразующих модулей целесообразно включать в процесс обучения теме в соответствии с логической последовательностью его изучения.

Материал темы «Первообразная и интеграл» достаточно сложный. Поэтому на первом этапе обучения теме необходимо особое внимание обратить на формирование мотивации к её изучению учащимися. Важно не только сформировать понятие интеграла, но и показать его практическое применение. С этой целью учитель может использовать материалы *мотивационного видео*. После просмотра обсудить с учащимися информацию, представленную в видео, предложить учащимся, используя электронные ресурсы, найти исторические сведения об открытиях, относящихся к интегральному исчислению, привести примеры применения интегралов в других областях науки.

Содержание *первого модуля* ориентировано на вычисление определённого интеграла. Для выполнения заданий у учащихся уже должны быть сформированы умения вычисления определённого интеграла. Поэтому их можно органично включить в этап развития умений вычисления определённого интеграла, формирования осознанного применения свойств и методов для решения различных задач.

В содержание *второго модуля* включены математические задачи на вычисление площади криволинейной трапеции и вычисление объёма тела вращения. Первоначальные умения вычисления значений этих характеристик математических объектов уже сформированы у учащихся. Поэтому процесс решения задач сопровождается расширением умственных действий учащихся, в частности, анализируют и оценивают различные выражения, выявляют аналитические модели линий, изображённых на координатной плоскости, сравнивают и анализируют выполненные преобразования, формулируют выводы.

Содержание первого и второго модулей ориентировано на использование знаний определённого интеграла при решении математических задач. Поэтому выполнение заданий этих модулей может быть организовано на соответствующих уроках в форме коллективной, групповой работы или самостоятельной работы, а также в качестве домашней работы. Если модули были предложены для выполнения дома, то после этого на уроке, рекомендуется организовать обсуждение, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы, в частности акцентировать применение свойств и методов для решения различных задач.

В рамках *третьего модуля* учащимся предлагается решить прикладные задачи естественнонаучной области с применением интегралов. При выполнении заданий модуля учащиеся переводят прикладную задачу в формат математической задачи, составляют соответствующую математическую модель. В процессе или после выполнения заданий целесообразно организовать обсуждение примеров, выявление возможности решения задач без использования интеграла. Наиболее успешным учащимся в качестве домашнего задания

в направлении подготовки к обсуждению можно предложить поиск примеров использования определённого интеграла в математике и других областях науки, например, в экономике, биологии, механике.

Этап обобщения и систематизации знаний по теме «Определённый интеграл» можно расширить заданиями *контрольного тестирования*. Рекомендуется выполнение тестирования организовать в интеграции с процессом самооценивания учащимися выполненной деятельности в рамках всех модулей, выявления учащимися уровня сформированности знаний и умений по теме «Определённый интеграл», выявления личностной значимости учебного материала темы.

2.10. Лабораторная работа «Решение задач на нахождение площади сечения многогранников и тел вращения»

Место в изучении учебного курса «Геометрия»: разделы «Многогранники», «Тела вращения», 10–11 классы.

Цель работы: развитие и совершенствование умений решения задач на нахождение площади сечения многогранников и тел вращения.

Задачи работы:

- 1) исследовать методы построения сечения многогранников;
- 2) построить сечения многогранников и тел вращения по заданным параметрам;
- 3) решить задачи на нахождение площади сечений многогранников и тел вращения, построенных по заданным параметрам.

Предметные результаты

на углублённом уровне изучения математики

«Многогранники», «Тела вращения»

- Свободно владеть понятием площадь и понятиями, связанными с понятием площадь.
- Свободно владеть понятием площадь многоугольников, площадь сечений многогранников и тел вращения.
- Знать методы построения сечений: метод следов, метод внутреннего проектирования, метод переноса секущей плоскости.
- Владеть методами построения сечений.
- Решать стереометрические задачи на построение сечений многогранников и тел вращения: сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения шара;

Структура системы интерактивных образовательных модулей

ИЭОМ № 1. Исследование методов построения сечения многогранников.

ИЭОМ № 2. Решение задач на построение сечений многогранников и поиск их площадей по заданным параметрам.

ИЭОМ № 3. Решение задач на построение сечений тел вращения и поиск их площадей по заданным параметрам.

Основное содержание и рекомендации по организации выполнения

Содержание лабораторно-практической работы включает теорию построения сечений многогранников и тел вращения и её практическое применение к решению стереометрических задач на построение сечений и вычисление площадей сечений по заданным параметрам. Это содержание соответствует разным разделам и темам, представленным в тематическом планировании примерных рабочих программ по учебному курсу «Геометрия» углублённого уровня в 10–11 классах, и не нарушает логику изложения учебного материала по курсу. Поэтому модули ИЛПР могут быть включены в изучение разных разделов и тем учебного курса «Геометрия» в разных классах. Например, в рамках темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве» при изучении построения сечений куба, призмы, правильной пирамиды с помощью ортогональной проекции (10 класс), «Повторение, обобщение и систематизация знаний» (10, 11 класс), «Тела вращения» (11 класс).

Мотивационное видео рекомендуется использовать в качестве домашнего задания в начале обучения стереометрии при первом знакомстве обучающихся с понятием “сечение” и формированием умений решения задач на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда (10 класс). В рамках домашней работы, опираясь на материал видео, предложить учащимся подобрать (придумать) примеры проявления сечений в быту и жизнедеятельности человека, выдвинуть гипотезы о методах построения сечений различных тел. На следующем уроке при фронтальной работе рассмотреть эти примеры, познакомиться с гипотезами о методах построения сечений, предложенными учащимися. Учителю следует отметить, что в процессе изучения курса гипотезы о методах построения сечений, выдвинутые учащимися, будут проверены.

В рамках **первого модуля** учитель организует исследование методов построения сечения многогранников. Содержание исследования можно условно разделить на три части, каждая из которых, направлена на один из методов построения сечений, например, первая часть посвящена построению сечений методом следов; вторая связана с построением сечений методом внутреннего проецирования; третья – построение сечений с дополнительными условиями. В зависимости от образовательной цели учитель может организовать выполнение заданий этого модуля с целью развития умений применения того или иного метода построения сечений, или на этапе повторения с обобщения и систематизации знаний в 10 и 11 классах. Таким образом, задания этого модуля можно выполнять в соответствии поставленным последовательно или выборочно. Результатом единого исследования в рамках первого модуля является система методов построения сечений многогранников и тел вращения.

В рамках *второго модуля* и *третьего модуля* расширяется содержание и деятельность учащихся, так как требуется не только построить сечение, но и найти его площадь по заданным параметрам, в частности многогранника и тел вращения. Учащиеся, базируясь на сконструированной системе методов построения сечений многогранников и тел вращения, выбирают соответствующий метод и выполняют практическую работу по построению сечений, выявляют вид сечения и вычисляют его площадь.

Таким образом, лабораторно-практическую работу можно использовать на разных этапах изучения геометрии, начиная от открытия новых знаний учащихся и мотивации до обобщения и систематизации знаний и умений на этапе повторения, что позволяет использовать модули по отдельности и в едином целом.

Подведение итогов.

Цель системы интерактивных лабораторно-практических работ по математике – развитие и совершенствование личностных и метапредметных результатов обучения математике через углубление, расширение и применение предметных знаний и умений.

В систему интерактивных лабораторно-практических работ по учебному предмету «Математика» входят десять рассмотренных работ на углублённом уровне изучения учебных курсов «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия» в 10–11 классах.

Содержание каждой лабораторно-практической работы имеет свою специфику, соответствующую содержанию учебного курса, его конкретному разделу, представленным в тематическом планировании примерных рабочих программ по учебному предмету «Математика» на углублённом уровне в 10–11 классах, и не нарушает логику изложения учебного материала по курсам.

В содержание ИЛПР включены не только математические задачи, но и практико-ориентированные и прикладные задачи, что способствует формированию функциональной математической грамотности обучающихся, раскрывает перед школьниками прикладную функцию математики как науки, взаимосвязь математики с реальной жизнью.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. Атанасов П. Т., Атанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987 – 110 с.
2. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике: Кн. для внеклассного чтения IX–X кл. – М.: Просвещение, 1985. – 148–165с. (Мир знаний).
3. Высшая математика II. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения / Ельцов А.А., Ельцова Т.А – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2020. – 233 с.
4. Высшая математика: учебное пособие / В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, М. М. Михалева, Н. В. Чукина, И.А. Шестакова. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017.– Ч. II. – 300 с.
5. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. – М.: Гос. изд. физ-мат. лит., 1961. – 148–169с.
6. Дубинина В. А. Авторская разработка на тему: «Задачи на построение сечений многогранников: теория и электронные технологии»./ Дубинина В. А / – Электронный ресурс. – URL: https://infourok.ru/zadachi_na_postroenie_secheniy_mnogogrannikov_teoriya_i_elektronnye_tehnologii-408683.htm
7. Исследовано в России [Электронный ресурс]: многопредмет. науч. журн. / Моск. физ.-техн. ин-т. – Электрон. журн. – Долгопрудный: МФТИ, 1998. – URL: <http://zhurnal.mipt.rssi.ru>.
8. Карнаухова О. А. Прикладные задачи в математике: учебное пособие / О. А. Карнаухова, В. А. Шершнева, Т. О. Кочеткова. – Сиб. федер. ун-т, Ин-т космич. и информ. технологий. – 2-е изд., испр. и доп. – Красноярск: СФУ, 2020 – 216 с.
9. Клещева И. В. Функции. Множества точек. Конические сечения. Учебное пособие/ И. В. Клещева. – СПб: СМИО Пресс, 2009. – 112 с.
10. Кожуров П. Я. Курс тригонометрии для техникумов. Гос. изд. технико-теоретической лит. М., 1956.
11. Козина М.Е. Математика. 8–9 классы: сборник элективных курсов. – Волгоград: Учитель, 2006.
12. Колосов А. А. Кн. для внеклассного чтения по математике в старших классах. – М.: Гос. учебно-пед. изд. Мин. Просв. РФ, 1963. – 407 с.

13. Муравин Г. К., Тараканова О. В. Элементы тригонометрии. 10 кл. – М.: Дрофа, 2001. – 128с.
14. Пичурин Л. Ф. О тригонометрии и не только о ней: пособие для учащихся 9–11 кл. – М.: Просвещение, 1996. – 80 с.
15. Показательная и логарифмическая функции. Наглядное пособие. Айрис-Пресс, 2013.
16. Тихомиров В. М. Дифференциальное исчисление (теория и приложения). Серия: Библиотека «Математическое просвещение» / Тихомиров В.М. – М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2002. – 40 с.
17. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
18. *mathprofi.ru.* – Электронный ресурс. – URL: http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Нормативно-правовое обеспечение организации деятельности учащихся при обучении учебному предмету «Математика» на уровне среднего общего образования

1.1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утверждён Приказом министерства образования и науки российской федерации от 17 мая 2012 г. № 413 (далее – ФГОС СОО))

Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12 августа 2022 г. № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования», утвержденный Приказом министерства образования и науки российской федерации от 17 мая 2012 г. № 413¹

По учебному предмету «Математика» (включая разделы «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия», «Вероятность и статистика») (углубленный уровень) требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

- 1) умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;
- 2) умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов;
- 3) умение оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач;

¹ Приказ министерства просвещения РФ от 12 августа 2022 г. № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования» – [Электронный ресурс]. – URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202209120008> (дата обращения 18.10.2022)

- 4) умение свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;
- 5) умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;
- 6) умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;
- 7) умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;
- 8) умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;
- умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;
- умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции;
- умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

- 9) умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;
- 10) умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;
- 11) умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел;
- 12) умение свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии;
- 13) умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

- 14) умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;
- 15) умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;
- 16) умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;
- 17) умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица 2×2 и 3×3 , определитель матрицы, геометрический смысл определителя;

- 18) умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;
- 19) умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

1.2. Примерные рабочие программы среднего общего образования учебного предмета «Математика»

1.2.1. Примерная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика». Базовый уровень². Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 7/22 от 29.09.2022 г.

1.2.2. Примерная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика». Углублённый уровень³. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 7/22 от 29.09.2022 г.

Личностные результаты

Личностные результаты освоения программы учебного предмета «Математика» характеризуются:

Гражданское воспитание:

сформированностью гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и пр.), умением взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением.

Патриотическое воспитание:

сформированностью российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках, технологиях, сферах экономики.

Духовно-нравственное воспитание:

осознанием духовных ценностей российского народа; сформированностью нравственного сознания, этического поведения, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью учёного; осознанием личного вклада в построение устойчивого будущего.

Эстетическое воспитание:

² Примерная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика». Базовый уровень. – М., 2021. – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_srednego_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_.htm (дата обращения: 18.10.2022)

³ Примерная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика». Углублённый уровень. – М., 2022. – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_srednego_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_uglublennij_uroven.htm (дата обращения: 18.10.2022)

эстетическим отношением к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений; восприимчивостью к математическим аспектам различных видов искусства.

Физическое воспитание:

сформированностью умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственного отношения к своему здоровью (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность); физического совершенствования при занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью.

Трудовое воспитание:

готовностью к труду, осознанием ценности трудолюбия; интересом к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой и её приложениями, умением совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы; готовностью и способностью к математическому образованию и самообразованию на протяжении всей жизни; готовностью к активному участию в решении практических задач математической направленности.

Экологическое воспитание:

сформированностью экологической культуры, пониманием влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознанием глобального характера экологических проблем; ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды.

Ценности научного познания:

сформированностью мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации; овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира; готовностью осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.

Метапредметные результаты

Универсальные познавательные действия, обеспечивают формирование базовых когнитивных процессов обучающихся (освоение методов познания окружающего мира; применение логических, исследовательских операций, умений работать с информацией).

Базовые логические действия:

- выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями; формулировать определения понятий; устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;
- воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные;
- выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;
- делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;
- проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; обосновывать собственные суждения и выводы;
- выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

Базовые исследовательские действия:

- использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;
- проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами;
- самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;
- прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Работа с информацией:

- выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи;
- выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;

- структурировать информацию, представлять её в различных формах, иллюстрировать графически;
- оценивать надёжность информации по самостоятельно сформулированным критериям.

Универсальные коммуникативные действия, обеспечивают сформированность социальных навыков обучающихся.

Общение:

- воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения; ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;
- в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения; сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций; в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;
- представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта; самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории.

Сотрудничество:

- понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы; понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач; принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы; обобщать мнения нескольких людей;
- участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнениями, «мозговые штурмы» и т.п.); выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды; оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

Универсальные регулятивные действия, обеспечивают формирование смысловых установок и жизненных навыков личности.

Самоорганизация:

- составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации.

Самоконтроль:

- владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов; владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;
- предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, данных, найденных ошибок, выявленных трудностей;
- оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения результатов деятельности, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

1.3. Концепция развития математического образования в Российской Федерации⁴. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р

I. Значение математики в современном мире и в России

«Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования современных математических методов. Без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализация долгосрочных целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации.

Развитие математического образования и науки, обеспечивающее прорыв в таких емких стратегических направлениях, как информационные технологии, моделирование в машиностроении, энергетике и экономике, прогнозирование природных и техногенных катастроф, биомедицина, будет способствовать улучшению положения и повышению престижа России в мире... Повышение уровня математической образованности сделает более полноценной жизнь россиян в современном обществе, обеспечит потребности в квалифицированных специалистах для наукоемкого и высокотехнологичного производства».

III. Цели и задачи Концепции

«Цель настоящей Концепции – вывести российское математическое образование на лидирующее положение в мире. Математика в России должна стать передовой и привлекательной областью знания и деятельности, получение математических знаний – осознанным и внутренне мотивированным процессом.

⁴ Концепция развития математического образования в Российской Федерации. – [Электронный ресурс]. – URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/> (дата обращения: 18.10.2022)

Изучение и преподавание математики, с одной стороны, обеспечивают готовность учащихся к применению математики в других областях, с другой стороны, имеют системообразующую функцию, существенно влияют на интеллектуальную готовность школьников и студентов к обучению, а также на содержание и преподавание других предметов.

Задачами развития математического образования в Российской Федерации являются:

модернизация содержания учебных программ математического образования на всех уровнях (с обеспечением их преемственности) исходя из потребностей обучающихся и потребностей общества во всеобщей математической грамотности, в специалистах различного профиля и уровня математической подготовки, в высоких достижениях науки и практики;

применение современных технологий образовательного процесса;

повышение качества работы преподавателей математики, обеспечение им возможности обращаться к лучшим образцам российского и мирового математического образования, достижениям педагогической науки и современным образовательным технологиям;

популяризация математических знаний и математического образования».

Список сокращений, используемых в пособии

ИЛПР – интерактивная лабораторно-практическая работа

ЛПР – лабораторно-практическая работа

ИЭОМ – интерактивный электронный образовательный модуль

ИСЛПР – интерактивная среда лабораторно-практической работы