



Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

**ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ  
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ**

**Методические рекомендации  
к интерактивным виртуальным лабораторным и практическим работам  
по предметам, изучаемым на углубленном уровне  
основного общего образования**

**МАТЕМАТИКА**

**Москва, 2021**

УДК 372.851

ББК 74.262.21

Методические рекомендации к интерактивным виртуальным лабораторным и практическим работам по предметам, изучаемым на углубленном уровне основного общего образования. Математика. — М.: ИСРО РАО, 2021. — 60 с.

В методических рекомендациях описываются структура и функционал интерактивных виртуальных лабораторных и практических работ по математике. Рассматриваются вопросы формирования функциональной (математической) грамотности при работе с интерактивными лабораторными работами с использованием конкретных примеров. Даются общие и частные методические рекомендации.

Пособие адресовано учителям математики, реализующим программы с углубленным изучением предмета.

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ.....	3
<b>I. Преимущества работы в интерактивной виртуальной лаборатории при обучении математике.....</b>	<b>4</b>
<b>II. Типы интерактивных виртуальных лабораторных практических работ в зависимости от целей обучения.....</b>	<b>5</b>
<b>III. Исследовательский подход при обучении математике на основе работы в интерактивной виртуальной лаборатории.....</b>	<b>8</b>
<b>IV. Рекомендации по использованию в процессе обучения математике на углубленном уровне отдельных интерактивных виртуальных лабораторных и практических работ.....</b>	<b>10</b>
РАБОТА 1. Построение графика линейной функции.....	11
РАБОТА 2. Построение графика обратной пропорциональности.....	15
РАБОТА 3. Арифметическая и геометрическая прогрессии.....	20
РАБОТА 4. Развёртки многогранников.....	24
РАБОТА 5. Длина окружности и площадь круга.....	28
РАБОТА 6. Координаты и векторы.....	50
РАБОТА 7. Простые числа.....	35
РАБОТА 8. Признаки делимости.....	38
РАБОТА 9. Движения плоскости.....	41
РАБОТА 10. Равновеликие и равносторонние фигуры.....	44
РАБОТА 11. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.....	47
РАБОТА 12. Подобие.....	50
РАБОТА 13. Преобразования графиков функций.....	52
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>60</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Лабораторные работы по математике имеют свою специфику.

Одной из целей обучения математике, особенно на углубленном уровне, является формирование у учащихся умений, характерных для математической деятельности. Погружение учащихся в учебную математическую деятельность предполагает создание условий для овладения математическим языком, общими логическими приемами мышления, для развития познавательных умений, способности осуществлять поиск решения математической задачи, умений построения логической цепочки рассуждений, построения и исследования математических моделей. Это, в свою очередь, предполагает формирование умения формулировать гипотезы относительно свойств и основных характеристик математических объектов и затем доказывать или опровергать их.

Одним из средств для формирования выделенного умения являются лабораторные работы. Именно **формулировка предположений (гипотез) относительно свойств рассматриваемых математических объектов является одной из целей лабораторной работы по математике.**

Практика использования в процессе обучения математике лабораторных работ имеет долгую историю. До появления возможностей использования цифровых технологий они делались «вручную» и предполагали работу с реальными объектами. При использовании компьютера реальные объекты и процессы имитируются в цифровом формате, что позволяет организовать работу с большим количеством параметров для более точного изучения математического объекта и получения более полного вывода, для оперативного приведения примеров и контрпримеров.

Использование в обучении интерактивных виртуальных лабораторных и практических работ по различным предметам способствует достижению как предметных, так и метапредметных результатов. В частности, формированию умений работы с информацией, представленной в цифровой среде, формированию ИКТ-компетенций.

### *Список сокращений*

ИВЛПР — интерактивная виртуальная лабораторная практическая работа.

ИЭОМ — интерактивный электронный образовательный модуль.

## **I. ПРЕИМУЩЕСТВА РАБОТЫ В ИНТЕРАКТИВНОЙ ВИРТУАЛЬНОЙ ЛАБОРАТОРИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

При обучении математике для эффективного формирования умений и приемов, характерных для математической деятельности, необходимо погружать ученика в специфику работы с математическими объектами, прежде всего — задачами, что называется, «вручную», с ручкой в руках и листом бумаги. Однако использование ИКТ может дать существенный положительный эффект.

Выделим преимущества, определяющие направления использования интерактивных виртуальных лабораторных практических работ при обучении математике.

- 1) Возможность построения математического объекта (например, графиков функций, образов движения, геометрических тел определенного вида и т. д.) на основе многократного (практически — бесконечного) количества изменений входящих в описание объекта параметров. Получение на основе этого представления о связи изменения объекта с изменяемым параметром, о зависимости характеристик математического объекта от выделенного параметра. Формулировка на основе этого предположений / гипотез.
- 2) Возможность многократного изменения взаимного расположения составляющих математического объекта (здесь прежде всего интересно исследование геометрических объектов). Получение на основе этого представлений о зависимости формы геометрического объекта от взаимного расположения его составляющих, в частности,

получение представлений о возможности получения отдельных частных случаев, о принципиально различных случаях. Формулировка на основе этого предположений / гипотез.

- 3) Возможность конструирования системы подсказок разного типа. Появление этих подсказок может быть заложено в алгоритм работы с заданием. В этом случае каждый пользователь проходит одинаковый путь. В другом варианте использование этих подсказок может определяться как учителем, так и учеником при возникновении у него затруднений. В этом случае каждый пользователь пройдет свой, индивидуальный путь. Последнее и создает безусловное преимущество интерактивных виртуальных лабораторных практических работ.
- 4) Возможность конструирования адаптивной среды, реакция которой адекватна действиям ученика. Например, в том случае, когда тип реакции обусловлен типом и содержанием ошибки, допущенной учеником.
- 5) Возможность конструирования учениками нового объекта как с заранее заданными свойствами, так и с произвольными свойствами, определяемыми в процессе конструирования.

## **1. Типы интерактивных виртуальных лабораторных практических работ в зависимости от целей обучения**

В зависимости от поставленных учебных целей можно выделить четыре типа интерактивных виртуальных лабораторных практических работ.

**Таблица 1. Типы интерактивных виртуальных лабораторных практических работ по математике**

<b>Тип (вид) ИВЛПР</b>	<b>Учебные цели</b>	<b>Примеры</b>
------------------------	---------------------	----------------

<p>Экспериментальная работа</p>	<p>Конструирование математического объекта с определенными свойствами.</p>	<p>Исследование линейной функции. Простые числа. Делимость чисел. Арифметическая и геометрическая прогрессия.</p>
<p>Исследовательская задача</p>	<p>Получение нового факта (свойства) об изучаемом объекте. Формулировка предположения о свойстве объекта, об алгоритме выполнения того или иного действия.</p>	<p>Преобразование графиков функций. Исследование функции «обратная пропорциональность».</p>
<p>Решение математической или практической задачи</p>	<p>Последовательность действий, направленная на поиск решения математической или практической задачи.</p>	<p>Движения, поиск результата композиции движений. Обратная пропорциональность, решение задачи с практическим содержанием. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Длина окружности и площадь круга.</p>
<p>Творческий эксперимент</p>	<p>Получение нового продукта.</p>	<p>Движения, построение орнамента.</p>

### **Экспериментальная работа**

Как правило, это работа, направленная на конструирование математического объекта с заданными свойствами, на проверку предположения о существовании или несуществовании такого объекта.

### **Исследовательская задача**

В полной мере исследовательская работа, направленная на всестороннее исследование определенного математического объекта, его свойств, наличие или отсутствие у него определенного свойства.

### **Решение математической или практической задачи**

Задача, как правило, незнакома учащимся и появляется в выполняемой работе впервые. Ее решение, очевидно, также неизвестно исполнителю. В этом случае выполнение работы направлено на поиск решения. Система имитирует процесс этого поиска через систему вопросов и промежуточных заданий.

### **Творческий эксперимент**

Практическая работа, направленная на конструирование объекта, не обязательно математического, но включающего математические характеристики, с произвольными свойствами, определяемыми в процессе конструирования. Свойства или характеристики, как правило, определяет сам пользователь (учащийся). В конце построения объекта они должны быть явно выделены и сформулированы.

## **II. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПОДХОД ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ РАБОТЫ В ИНТЕРАКТИВНОЙ ВИРТУАЛЬНОЙ ЛАБОРАТОРИИ**

Реализация исследовательского подхода при обучении математике, особенно в классах с углубленным изучением математики, является важным условием повышения продуктивности деятельности каждого учащегося. Важной составляющей исследовательской деятельности является формулирование гипотез о свойствах математического объекта, о закономерностях предлагаемых к рассмотрению математических явлений.

В каждой из разработанных интерактивных виртуальных практических лабораторных работ этот подход реализован в большей или в меньшей степени, в зависимости от содержания темы работы.

При выполнении виртуальной работы создание условий для формулировки предположений / гипотез достигается за счет накопительного эффекта: проведения большого количества опытов при различных значениях параметров, которые определяют поведение и свойства математического объекта.

Кроме того, проведение исследования в виртуальной лаборатории позволяет учащимся приобретать опыт по планированию, организации и проведению эксперимента: определять, какие значения параметра эффективнее взять, чтобы увидеть различия в результатах; умение наблюдать за ходом процесса, самостоятельно прогнозировать его результат, формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования, составлять отчет о проделанной работе.

Важнейшая функция виртуального экспериментального исследования — формирование умений использовать исследовательские задачи в качестве инструмента познания, инструмента, который позволяет осуществлять поиск и самостоятельно находить решение задачи.

Предлагаемые учащимся задания нередко выходят за рамки школьного учебника и не отражены в нем. В этом случае для решения поставленной задачи обучающимся нужно обращаться к различным источникам информации (справочники, научно-популярная математическая литература,

ресурсы Интернета). Работая с различными источниками, у обучающихся развиваются умения отбора информации, ее анализа и интерпретации.

Особенностью исследовательского эксперимента по математике в виртуальном пространстве является расширение возможностей творческой деятельности школьников, позволяет получить продукты, которые не могут быть получены в реальности.

В качестве иллюстрации можно привести фрагмент сценарного плана при проведении работы «Движения» по созданию орнаментов.

Виртуальная практическая исследовательская работа — это метод формирования у школьников исследовательских умений, получения новых знаний в процессе самостоятельного исследования, овладения методологией научного творчества. В условиях организации деятельности школьников с предлагаемыми интерактивными виртуальными лабораторными и практическими работами рассмотренные дидактические функции виртуального эксперимента могут быть реализованы на двух уровнях.

Первый уровень связан с применением имеющихся знаний в новых, измененных условиях. Исследовательская задача выявляет «когнитивный конфликт», обостряет противоречия между имеющимися знаниями и фактами, установленными в процессе выполнения опыта. Неважно, что опыт виртуальный, он побуждает у ученика мыслительную деятельность, т. к. обыденные и научные представления, усвоенные им знания вступают в противоречие со вновь установленными фактами. Противоречие между содержанием виртуального эксперимента и опытом ребенка является необходимым элементом процесса познания. Оно является условием поддержания познавательного интереса, стимулом решения поставленной задачи, движущей силой понимания процесса обнаружения смысла.

Второй уровень связан с применением знаний в условиях неопределенности, неоднозначности учебной задачи, вариативности ее решений. В этом случае очень важно, какие вопросы побуждает у школьника работа в виртуальной лаборатории, обозначен ли в них запрос на новое знание.

Рефлексивно-смысловые вопросы, отражающие отношение ученика к содержанию учебной деятельности, выраженные в речевой форме, являются индикатором включенности учащегося в процесс познания. В этих условиях существенно повышается роль учителя как организатора диалога.

Предлагаемые интерактивные виртуальные лабораторные и практические работы содержат задания, побуждающие ученика к анализу и рефлексии знаний, связанных с жизнью, способами познания, с их субъектным опытом. Лабораторные работы включают в себя межпредметные задачи, а также задачи, направленные на формирование математической грамотности. Это побуждает учащихся к реализации и совершенствованию умений, связанных с построением, решением, исследованием математических моделей, а также с интерпретацией результатов, полученных при их решении.

### **III. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ ОТДЕЛЬНЫХ ИНТЕРАКТИВНЫХ ВИРТУАЛЬНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

Очевидно, что каждая тема в курсе математики основной школы обладает своей спецификой. Поэтому при конструировании лабораторных работ по отдельным темам учитывались специфика содержания и его возможности для создания условий формирования математической деятельности.

Каждая из предлагаемых лабораторных интерактивных работ может стать основой для организации работы в разных формах и на разных этапах усвоения содержания. В том числе при реализации технологии «Перевернутый класс».

Теоретический материал, предлагаемый в каждой работе, может быть предложен учащимся как для самостоятельного изучения, так и для актуализации знаний индивидуально или в группе с последующим обсуждением.

## РАБОТА 1. Построение графика линейной функции

**Цель** ИВЛПР № 1: изучить некоторые свойства линейной функции и принципы построения ее графика на основе исследования зависимости положения графика функции и свойств функции от ее коэффициентов.

ИВЛПР № 1 направлена на достижение следующих результатов.

### Предметные

1. Распознавать линейную функцию  $y = kx + b$ , описывать ее свойства в зависимости от значений коэффициентов  $k$  и  $b$ .
2. Умение свободно оперировать понятиями: функция, график функции, прямая пропорциональность, линейная функция.
3. Умение строить графики функций (линейной и некоторых дробно-рациональных), выполнять преобразования графиков функций.
4. Умение выражать формулами зависимость между величинами.
5. Понимать графический способ представления и анализа информации.

### Метапредметные

1. Формирование умения выявлять зависимость между формулой и графиком — аналитической и графической формой представления содержания.
2. Формирование умения формулировать гипотезы о связи значений коэффициентов линейной функции и положения графика линейной функций.
3. Формирование умения делать выводы на основе анализа взаимосвязи между коэффициентами в формуле и графиком функции и формулировать их.
4. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

5. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.

6. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.

7. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

8. Использовать цифровые ресурсы для построения графиков функций и изучения их свойств.

9. Приводить примеры линейных зависимостей в реальных процессах и явлениях.

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной школе при изучении темы «Линейная функция» на разном уровне изучения математики.

Работа включает в себя интерактивное видео, которое может предлагаться на этапе мотивации при изучении:

— линейной функции,

— кусочно-заданных функций,

— графического метода решения задач с практическим содержанием.

Работа с интерактивным видео может быть организована как в режиме фронтальной работы, так и в качестве домашнего задания с последующим обсуждением его содержания и ответов на задание.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Построение графика линейной функции  $y = kx + b$ . Коэффициент  $k$  в уравнении линейной функции и влияние его значения на расположение графика линейной функции на координатной плоскости»,

ИЭОМ № 2. «Построение графика линейной функции  $y = kx + b$ . Коэффициент  $b$  линейной функции»,

ИЭОМ № 3. «Некоторые свойства линейной функции»,

ИЭОМ № 4. «Построение графиков функций, сводящихся к линейным».

ИЭОМ № 1 и ИЭОМ № 2 содержат основной материал, обязательный для изучения, независимо от уровня обучения математике.

Работа с этими лабораторными работами может быть организована на этапе введения нового материала в классах с любым уровнем подготовки и ориентированным как на базовый, так и на углубленный уровень обучения математике.

В классах с невысоким уровнем математической подготовки и с невысоким уровнем сформированности умений самостоятельной деятельности работа с данными элементами может быть организована фронтально, с пошаговым обсуждением промежуточных результатов. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

В классах с хорошим уровнем математической подготовки, а также в классах с углубленным изучением математики целесообразно организовывать деятельность с ИЭОМ № 1 и ИЭОМ № 2 в условиях самостоятельной работы (в классе или дома) как на этапе введения нового материала и на этапе закрепления полученных знаний, так и для актуализации знаний и умений на этапе обобщения и систематизации.

ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 могут быть предложены сильным учащимся в классах с базовым уровнем изучения математики или всем учащимся при обучении математике на углубленном уровне на этапе изучения нового материала для получения новых выводов с целью их использования при построении графиков более сложных функций.

ИЭОМ № 3 предполагает получение выводов о некоторых свойствах линейной функции.

Первая часть ИЭОМ направлена на получение вывода о взаимосвязи положения графиков двух функций с противоположными значениями угловых коэффициентов.

Вторая часть представляет собой материал для углубленного изучения, а именно — характеристического свойства линейной функции, то есть свойства, которым обладают все линейные функции и только они: «При изменении аргумента на одну и ту же величину значение функции также изменяется на одну и ту же величину или приращение функции пропорционально приращению ее аргумента». Деятельность по выполнению этой части работы целесообразно организовать в классе, в форме фронтальной работы, или после самостоятельного изучения материалов, обязательно организовать обсуждение в классе с формулировкой существенных выводов и записью их в тетрадь. Кроме этого, рекомендуется предложить задания, например, такого типа:

1) Проверьте, выполняется ли сформулированное свойство для функций:

$$- y = -8x + 15$$

$$- y = x^2 - x$$

$$- y = \frac{3}{x} + 1$$

2) Докажите, что функция  $y = \sqrt{(x - 1)^2}$  не является линейной

и т. п.

ИЭОМ № 4 соответствует углубленному уровню обучения математике и может предлагаться как при изучении темы «Линейная функция», так и при изучении построения графика дробно-рациональной функции, которая после преобразований сводится к линейной с выколотыми точками.

Первая часть ИЭОМ № 4 предполагает работу с линейным уравнением с двумя переменными, а также с понятием «неявное задание функции».

После выполнения этой части работы учащимся может быть предложено дополнительное задание следующего типа:

1) Выясните взаимное расположение прямых

$$3x + 4y = 3 \text{ и } -3x - 4y = -5.$$

- 2) Сформулируйте условие параллельности прямых, заданных уравнениями:

$$ax + 5y = 3 \text{ и } bx - 15y = 6.$$

Вторая часть ИЭОМ № 4 направлена на формирование умения строить графики дробно-рациональных функций. Построение графиков таких функций востребовано, в частности, при решении задания с параметром, включенного в содержание ОГЭ по математике в основной школе. Поэтому после работы с этой частью работы целесообразно предложить для выполнения задания, подобные следующим:

- 1) Постройте график функции.
- 2) При каких значениях параметра графики функций

$$y = \frac{x^2 - 4x}{x + 2} - 3 \text{ и } y = kx \text{ не имеют общих точек.}$$

## **РАБОТА 2. Построение графика обратной пропорциональности**

**Цель** ИВЛПР № 2: изучить свойства и принципы построения графика обратной пропорциональности, определить зависимость между свойствами функции обратной пропорциональности и ее графиком.

ИВЛПР № 2 направлена на достижение следующих результатов.

### Предметные:

1. Использовать функциональную терминологию и символику.
2. Вычислять значения функций, заданных формулами (при необходимости использовать калькулятор).
3. Составлять таблицы значений функций.
4. Строить по точкам графики функций.
5. Описывать свойства функции обратной пропорциональности на основе ее графического представления.

6. Строить графики дробно-линейных функций и дробно-рациональных функций вида  $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$  на основе использования сложения графиков функций, в том числе находить асимптоты: вертикальные, горизонтальные и наклонные.
7. Описывать свойства дробно-линейных функций и дробно-рациональных функций вида  $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ , в том числе их поведение вблизи точек разрыва и на бесконечности.

Метапредметные:

1. Формирование умения выявлять и характеризовать существенные свойства функции обратной пропорциональности и ее графика.
2. Формирование умения выявлять взаимосвязь между формулой и графиком — аналитической и графической формой представления содержания.
3. Формирование умения формулировать гипотезы о свойствах преобразований графиков функций.
4. Формирование умения формулировать выводы на основе анализа взаимосвязи между формулой и графиком.
5. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей функции обратной пропорциональности, самостоятельно выбирая параметры изменения объекта.
6. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.
7. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
8. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.
9. Использовать цифровые ресурсы для построения графиков функций и изучения их свойств.

10. Исследовать примеры графиков, отражающих реальные процессы и явления.

11. Приводить примеры процессов и явлений с заданными свойствами.

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной или, в некоторых случаях, в старшей школе при изучении функций.

Работа включает в себя интерактивное видео, которое может предлагаться на этапе мотивации при изучении:

- функции «обратная пропорциональность»,
- функциональных зависимостей.

Работа с интерактивным видео может быть организована как в режиме фронтальной работы, так и в качестве домашнего задания с последующим обсуждением его содержания и ответов на задание.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Построение графика обратной пропорциональности»,

ИЭОМ № 2. «Свойства и график дробно-линейной функции»,

ИЭОМ № 3. «Применение графика дробно-линейной функции для решения задачи с практическим содержанием»,

ИЭОМ № 4. «Сложение графиков функций. График дробно-рациональной функции вида».

Желательно использовать предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 в той последовательности, в которой они предлагаются в работе. Их можно использовать как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении.

## ИЭОМ № 1. «Построение графика обратной пропорциональности»

Цель этой работы — сформулировать вывод о форме графика обратной пропорциональности и сформулировать вывод о свойствах функции и о положении графика функции при разных значениях параметра  $k$ .

Содержание, предлагаемое в этой части, является обязательным для усвоения учащимися, независимо от уровня обучения математике.

Работа состоит из двух частей. В первой части необходимо построить график функции обратной пропорциональности по точкам, вычисляя значения функции в заданных точках, заполняя таблицу и отмечая точки с полученными координатами на координатной плоскости, а затем сформулировать свойства, которыми она обладает. При этом предполагается формирование представления о понятии «асимптота», рассмотрение горизонтальной и вертикальной асимптот, а также формулировка вывода: «График функции обратной пропорциональности не пересекает оси координат. Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой графика функции  $y = \frac{1}{x}$ , а ось ординат — его вертикальной асимптотой».

Во второй части предполагается исследование изменения формы графика функции и его положения на координатной плоскости при разных значениях параметра  $k$ .

## ИЭОМ № 2. «Свойства и график дробно-линейной функции»

Цель этого модуля состоит в формулировке вывода о свойствах и виде графика функции  $y = \frac{ac+b}{cx+d}$  на основе формирования представления о дробно-линейной функции как сумме постоянной и обратной пропорциональности.

При выполнении этой части лабораторной работы учащимся предстоит исследовать дробно-линейную функцию. Для этого предлагается последовательно выбрать несколько комбинаций значений коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  и, выделив целую часть, построить ее график и найти асимптоты.

Материал этого модуля не является обязательным для освоения в классах с базовым обучением математике. Однако он может быть предложен сильным учащимся в качестве дополнительного материала для самостоятельного выполнения. В том случае, когда у большей части учащихся класса подготовка по математике соответствует уровню выше среднего, эта часть также может быть предложена всем учащимся в качестве домашней работы с последующим обсуждением результатов в классе. В классах с углубленным изучением математики материал ИЭОМ № 2 является обязательным для изучения. В этом случае работа с ним может быть организована как в классе в режиме фронтальной работы, так и в режиме самостоятельной (домашней) работы с последующим обсуждением результатов ее выполнения.

ИЭОМ № 3. «Применение графика дробно-линейной функции для решения задачи с практическим содержанием»

Цель модуля заключается в решении задачи с практическим содержанием на основе использования знаний о графике дробно-линейной функции.

При выполнении этой части лабораторной работы учащимся предлагается решить задачу, выполнив последовательность действий и используя те знания, которые они получили при выполнении ИЭОМ № 2.

Работа с этим модулем может быть организована как индивидуально, так и в группе. В классах с не очень высоким уровнем подготовки целесообразна организация фронтальной работы с этим модулем. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

ИЭОМ № 4. «Сложение графиков функций. График дробно-рациональной функции вида  $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ »

Цель этого модуля — формулировка вывода о принципах построения графика дробно-рациональной функции вида  $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$  на основе формирования представления о дробно-рациональной функции заданного вида как сумме линейной функции и функции обратной пропорциональности.

При выполнении этой части лабораторной работы учащимся предстоит исследовать дробно-рациональную функцию. Для этого им будет предложено последовательно выбрать несколько комбинаций значений коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$  и, выделив целую часть, построить ее график и найти асимптоты.

На этапе закрепления изученного материала интерактивные модули могут быть предложены не самым сильным ученикам для отработки изученных фактов.

При организации работы с предлагаемыми интерактивными модулями учитель может изменить функцию, с которой работают учащиеся, или предложить им ввести ее самостоятельно.

Заметим, что материалы ИЭОМ № 4 могут быть использованы и при изучении математики в старшей школе. В этом случае материалы этого модуля могут быть предложены перед изучением построения графиков функции в качестве домашнего задания. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы.

### **РАБОТА 3. Арифметическая и геометрическая прогрессии**

Цель ИВЛПР № 3: изучить свойства и способы вычисления сумм  $n$  членов арифметической и геометрической прогрессий.

ИВЛПР № 3 направлена на достижение следующих результатов.

Предметные:

1. Умение оперировать понятиями: арифметическая и геометрическая прогрессии.
2. Умение использовать свойства прогрессий, вычислять суммы прогрессий.
3. Анализировать формулу  $n$ -го члена последовательности или рекуррентную формулу и вычислять члены последовательностей, заданных этими формулами.
4. Устанавливать закономерность в построении последовательности, если выписаны первые несколько ее членов.
5. Распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии при разных способах задания.
6. Решать задачи с использованием формул  $n$ -го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых  $n$  членов.

Метапредметные:

1. Строить речевые высказывания с использованием терминологии, связанной с понятием последовательности.
2. Формирование умения выявлять и характеризовать существенные свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий.
3. Рассматривать примеры процессов и явлений из реальной жизни, иллюстрирующие изменение в арифметической прогрессии, в геометрической прогрессии.
4. Решать задачи на сложные проценты, в том числе задачи из реальной практики.

5. Решать задачи, связанные с числовыми последовательностями, в том числе задачи из реальной жизни с использованием цифровых технологий (электронных таблиц, графического калькулятора и т. п.).
6. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей функции обратной пропорциональности, самостоятельно выбирая параметры изменения объекта.
7. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.
8. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
9. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной школе или в старшей школе при подготовке к ЕГЭ.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий»,

ИЭОМ № 2. «Конструирование последовательности»,

ИЭОМ № 3. «Сумма  $n$  первых членов арифметической прогрессии»,

ИЭОМ № 4. «Решение экономических задач».

ИЭОМ № 1. «Характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий» и ИЭОМ № 3. «Сумма  $n$  первых членов арифметической прогрессии» позволяют учащимся основной школы изучить материал с большей самостоятельностью, учителю оптимизировать аудиторное время, а старшеклассникам самостоятельно вспомнить соответствующие формулы. В ИЭОМ № 1 предполагается получение и формулировка характеристических свойств арифметической и

геометрической прогрессий, а затем решение задач. При выполнении ИЭОМ № 3 учащимся предлагается на основе задачи Гаусса вывести формулу нахождения суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии и решить задачу.

Интерактивный модуль № 4. «Решение экономических задач» расширяет программное содержание за счет изучения дополнительного материала прикладного (банковского) характера. При его выполнении учащимся предлагается самостоятельно сконструировать математическую модель начисления банком простых и сложных процентов, а также на основе свойств прогрессий вывести формулы начисления простых и сложных процентов.

ИЭОМ № 2. «Конструирование последовательности» более подробно в формате интерактивного модуля знакомит учащихся с задачей повышенной сложности из профильного варианта ЕГЭ. Этот модуль целесообразно использовать и в старшей школе при подготовке старшеклассников к ЕГЭ.

Предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 могут выполняться учащимся как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении. Выполнение ИЭОМ № 2 в основной школе требует знания характеристических свойств прогрессий, поэтому целесообразно после выполнения ИЭОМ № 1.

Интерактивные модули могут предлагаться на этапе введения нового материала. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы.

Другой вариант использования предлагаемой работы на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

Также работа может быть использована в технологии «перевернутый класс», когда учащимся предлагается самостоятельно (дома или в классе) выполнить один или несколько интерактивных модулей, а затем при необходимости задать учителю возникшие вопросы, обсудить проблемы, связанные с пониманием материала модулей.

На этапе закрепления изученного материала интерактивные модули могут быть предложены не самым сильным ученикам для дополнительной отработки изученных фактов.

Сильным учащимся на этом этапе может быть предложена самостоятельная или проектная работа в Свободной Лаборатории для получения новых выводов.

Все представленные работы способствуют развитию исследовательской культуры учащихся за счет поиска ими закономерностей, обобщения, формулировки гипотез, проверки истинности математических утверждений, подбора примеров, контрпримеров, построения математических моделей и пр.

#### **РАБОТА 4. Развёртки многогранников**

Цель ИВЛПР № 4: изучить развёртки многогранников (куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы), свойства многогранников и их развёрток, создать условия для развития пространственных представлений и воображения.

ИВЛПР № 4 направлена на достижение следующих результатов.

Предметные:

1. Знакомство с многогранниками, видами многогранников, их изображением и развёртками.
2. Формирование представлений о том, как строятся развёртки многогранников.

### Метапредметные:

1. Выявлять и характеризовать существенные признаки объектов.
2. Проводить по самостоятельно составленному плану опыт, несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей объекта изучения, причинно-следственных связей и зависимостей объектов между собой.
3. Оценивать на применимость и достоверность информации, полученной в ходе исследования (эксперимента).
4. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.
5. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
6. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

ИВЛПР «Развертки многогранников» носит ознакомительный характер и может быть использована в процессе обучения математике в основной школе как пропедевтического курса стереометрии.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Паук и муха»,

ИЭОМ № 2. «Развёртка призмы»,

ИЭОМ № 3. «Развёртка пирамиды»,

ИЭОМ № 4. «Развёртка усеченной пирамиды».

ИЭОМ № 1. «Паук и муха»

Целью этой работы является демонстрация применения развёртки прямоугольного параллелепипеда для решения задач. Учащимся предстоит при выполнении этой лабораторной работы найти кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда. В ходе выполнения заданий учащимся необходимо обобщить свои наблюдения

и ответить на несколько вопросов. Ответы на вопросы целесообразно обсудить в форме фронтальной работы на уроке.

Содержание ИЭОМ № № 2–4 представляет собой расширение содержания курса геометрии основной школы за счет формирования системы представлений о свойствах пространственных фигур.

#### ИЭОМ № 2. «Развёртка призмы»

Цель работы — знакомство учащихся с различными развёртками призмы.

В этой работе учащиеся выполняют действия с развёртками различных призм.

В ходе выполнения заданий учащимся необходимо обобщить свои наблюдения и ответить на 5 вопросов: сформулировать выводы, заполнив пропуски или выбрав правильный вариант ответа.

#### ИЭОМ № 3. «Развёртка пирамиды»

Цель работы — знакомство учащихся с различными развёртками пирамиды.

В этой работе учащиеся выполняют действия с развёртками различных пирамид.

В ходе выполнения заданий учащимся необходимо обобщить свои наблюдения и ответить на 5 вопросов: сформулировать выводы, заполнив пропуски или выбрав правильный вариант ответа.

#### ИЭОМ № 4. «Развёртка усеченной пирамиды»

Цель работы — знакомство учащихся с развёртками усеченной пирамиды

В этой работе учащиеся выполняют действия с развёртками различных пирамид.

В ходе выполнения работы учащимся необходимо обобщить свои наблюдения и ответить на 5 вопросов: сформулировать выводы, заполнив пропуски или выбрав правильный вариант ответа.

Предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 могут предлагаться для выполнения учащимся в любой последовательности. В модулях рассматриваются многогранники по возрастанию сложности. Поэтому логичнее будет рассматривать их в той последовательности, в которой они представлены. При этом ИЭОМ № 4 целесообразно выполнять после ИЭОМ № 3.

Перед тем как приступить к выполнению лабораторной работы, необходимо обсудить с учащимися, что им известно о многогранниках, какие многогранники им известны из школьного курса математики, из личного опыта. Желательно рассмотреть модели многогранников, которые в дальнейшем будут рассматриваться в лабораторной работе.

Предлагаемые модули могут быть рассмотрены на уроке в режиме коллективной работы или могут быть предложены для домашней работы или для самостоятельной работы отдельных учащихся. Если модули были предложены для выполнения дома, то после этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы.

Если в программе по геометрии основной школы запланировано рассмотреть элементы стереометрии, то модули можно использовать на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована также в процессе обучения геометрии в старшей школе при изучении тем «Призма» и «Пирамида».

Интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 можно выполнять как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении.

Предлагаемые ИВЛПР целесообразнее использовать на этапах закрепления и применения нового материала. Также соответствующий интерактивный модуль может быть предложен в качестве домашнего задания. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы.

Еще один вариант использования предлагаемой работы на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

На этапе закрепления изученного материала интерактивные модули могут быть предложены ученикам для отработки изученных фактов.

## **РАБОТА 5. Длина окружности и площадь круга**

Цель ИВЛПР № 5: вывести формулы длины окружности и площади круга на основе экспериментального исследования.

ИВЛПР № 5 направлена на достижение следующих результатов.

Предметные:

1. Установить зависимость между длиной окружности и ее диаметром.
2. Экспериментально обосновать формулы длины окружности и площади круга.
3. Проследить историю вычисления отношения длины окружности к ее диаметру.
4. Познакомиться с понятием предельного перехода.

Метапредметные:

1. Выявлять и характеризовать существенные признаки объектов.
2. Проводить по самостоятельно составленному плану опыт, несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей объекта изучения, причинно-следственных связей и зависимостей объектов между собой.
3. Самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.
4. Владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
5. Оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Первый практический способ определения длины окружности»,

ИЭОМ № 2. «Второй практический способ измерения длины окружности»,

ИЭОМ № 3. «Эксперимент по вычислению числа  $\pi$ »,

ИЭОМ № 4. «Экспериментальное обоснование формулы площади круга».

Лабораторная работа предлагается для учеников 9 класса. Ее цель — актуализация знаний учеников о длине окружности и площади круга, процессе получения формул. Основная познавательная нагрузка сосредоточена в третьей части работы (ИЭОМ № 3), где раскрывается идея предельного перехода при построении последовательности периметров правильных вписанных в окружность многоугольников, а также в заключительной части, где рассматривается площадь круга и перестраивание круга в равновеликую фигуру.

Особенность данной лабораторной работы по теме «Длина окружности и площадь круга» состоит в том, что сами формулы известны ученикам из курса математики 5–6 классов. Они имеют опыт их применения при решении задач на вычисление. Не исключено, что они знакомы с историей вычисления значения числа  $\pi$  и с некоторыми практическими способами определения длины окружности. Они могли также еще в начальной школе научиться определять площадь фигуры с помощью палетки.

В этой ситуации целесообразно сначала вспомнить некоторые практические способы вычисления длины окружности и площади круга. Этому посвящены ИЭОМ № 1 и № 2. Эти модули могут быть предложены для самостоятельного выполнения с последующим кратким подведением итогов на уроке.

Если учащиеся знакомы с практическими способами вычисления длины окружности из предыдущего курса математики, то первую и вторую работы можно предложить как факультативные, а также можно предложить ученикам, проявляющим интерес к изготовлению материальных моделей, сделать аппликации, аналогичные представленным на рисунке в работе 4.

Затем сосредоточить основное внимание на процедуре вычисления значения числа  $\pi$  с помощью последовательности вписанных в окружность правильных многоугольников (ИЭОМ № 3), то есть повторить тот путь, который проделали математики античности для вычисления значения числа  $\pi$ , а также на перестраивании круга в равновеликую фигуру, близкую к прямоугольнику (ИЭОМ № 4). Но доказательство формул связано с важнейшей идеей математики — идеей предельного перехода.

Сами лабораторные работы целесообразно предложить для самостоятельного выполнения дома перед соответствующими уроками по теме (применением технологии «перевернутый класс»), а на уроке после выполнения этих работ акцентировать внимание на идее предельного перехода, также рассмотреть вторую последовательность периметров правильных многоугольников, описанных около окружности, которая

стремится к длине окружности «сверху». Этой последовательности в лабораторной работе почти не уделено внимание. Также по возможности целесообразно было бы расширить вычислительный эксперимент по пополнению последовательности периметров, взяв правильные многоугольники с большим и очень большим числом сторон, применяя ЭВМ или проводя бинарный урок «Геометрия — информатика». С помощью компьютера было бы интересно и полезно построить модель перестраивания круга в прямоугольник (ИЭОМ № 4). Как один из вариантов, эти задания можно предложить в качестве индивидуальных или групповых.

Обратим внимание учителя, что еще один вариант раскрытия идеи предельного перехода — изучение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которое также целесообразно связать с вычислительным экспериментом.

ИЭОМ № 1. «Первый практический способ определения длины окружности»

В лабораторной работе рассматривается один из практических способов измерения длины окружности, когда ее радиус неизвестен, основанный на «разгибании». Нужно будет заполнить таблицу, которая покажет, какова особенность отношения длины окружности к ее радиусу (или диаметру).

ИЭОМ № 2. «Второй практический способ измерения длины окружности»

Работа показывает второй способ измерения длины окружности: «прокатывание» окружности по отрезку и измерение пройденного фиксированной точкой расстояния. На основе заданных параметров нужно будет вновь заполнить таблицу и проверить величину отношения длины окружности к ее радиусу.

### ИЭОМ № 3. «Эксперимент по вычислению числа $\pi$ »

Работа предполагает много построений правильных многоугольников, вписанных в окружности, и вычисление на основе измерений длин сторон их периметров и площадей.

### ИЭОМ № 4. «Экспериментальное обоснование формулы площади круга»

В данной работе на основе перестраивания круга в равновеликую фигуру и проведения второй части вычислительного эксперимента можно будет убедиться в достоверности формулы площади круга.

Мы не даем жестких рекомендаций по месту выполнения работы (дома или на уроке), но вычислительный эксперимент по заполнению таблицы в работе № 3 может быть реализован в формате бинарного урока «математика — информатика».

## **РАБОТА 6. Координаты и векторы**

Цель ИВЛПР № 6: изучение и применение координатного и векторного методов решения задач.

ИВЛПР № 6 направлена на достижение следующих результатов.

#### Предметные:

1. Формирование умения свободно оперировать понятиями: вектор, сумма, разность векторов, произведение вектора на число.
2. Формирование умения свободно оперировать понятиями: координаты на плоскости, координаты вектора.
3. Представлять геометрические факты на языке векторов и координат.
4. Формирование умения применять векторный и координатный метод для решения задач.

### Метапредметные:

1. Формирование умения выбирать подходящий метод решения задач.
2. Формирование умения представлять информацию в разных формах, переводить утверждения с одного языка математики на другой.
3. Формирование умения формулировать гипотезы, намечать пути и способы их проверки.
4. Формирование умения устанавливать справедливость предположений, интерпретировать полученные результаты.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Изучение основ векторного метода»,

ИЭОМ № 2. «Применение векторного метода»,

ИЭОМ № 3. «Изучение метода координат»,

ИЭОМ № 4. «Применение метода координат».

Тема «Координаты и векторы» — одна из важнейших для курса математики как в теоретическом, так и прикладном плане. Она по традиции в школьном курсе геометрии имеет большой объем, но, согласно заданной цели, мы ограничимся только вопросами, связанными с векторным и координатным методами решения задач. При построении работ мы исходим из того, что ученики знакомы с векторами и векторной алгеброй, знают координатную плоскость, умеют работать с координатами и строить графики функций. Две работы связаны с векторами (знакомство с методом и его применение), две — с координатами, и они построены по тому же принципу.

Мы исходим из того, что на момент выполнения этих работ ученики знакомы с векторами и операциями над ними (для выполнения первой и второй работ), а также знакомы с координатами, координатами вектора и, возможно, знают о скалярном произведении векторов, владеют формулой скалярного произведения в проекциях.

ИЭОМ № 1 и 2 целесообразно выполнять при изучении темы «Векторы», а ИЭОМ № 3 и 4 — при изучении координат.

При этом в классах с высоким уровнем математической подготовки целесообразно предлагать для самостоятельного выполнения с последующим обсуждением полученных результатов. В классах с невысоким уровнем математической подготовки более целесообразно организовать фронтальную работу с пошаговым обоснованием каждого действия и формулировкой выводов.

В любом случае после выполнения ИЭОМ № 2 и 4 целесообразно предложить задачи для самостоятельного решения.

Учащиеся знакомы с системой координат, умеют работать с координатной плоскостью, строить графики функций. Также учащиеся уже знакомы с понятием вектора, изучили элементы векторной алгебры. Данная виртуальная практическая работа, состоящая из 4 модулей, посвящена знакомству с векторным и координатным методами как мощным средством построения и исследования математических моделей и применению этих методов при решении задач. В серии из четырех работ две связаны с векторным методом и две — с координатным. Сначала предполагается знакомство с каждым из этих методов (ИЭОМ № 1 — векторный метод, ИЭОМ № 3 — координатный метод), а затем рассмотрение, как их можно применять при проведении учебных исследований и решении задач (ИЭОМ № 2 — векторный метод, ИЭОМ № 4 — координатный метод).

#### ИЭОМ № 1. «Изучение основ векторного метода»

В этом модуле рассматриваются две задачи, которые иллюстрируют применение векторного метода. Результатом выполнения работы является установление последовательности шагов по реализации векторного метода. Кроме того, представлены примеры перевода с геометрического языка на векторный и обратно.

### ИЭОМ № 2. «Применение векторного метода»

В этом модуле рассматривается применение векторного метода на основе исследования свойств высот треугольника и параллелограмма Вариньона.

### ИЭОМ № 3. «Изучение координатного метода»

В этом модуле рассматриваются задания, иллюстрирующие применение метода координат. Результатом выполнения работы является установление последовательности шагов по реализации метода координат.

ИЭОМ № 4. «Метод координат как средство обоснования гипотез и решения задач»

В заключительной предлагаются для решения два задания на применение координатного метода.

## **РАБОТА 7. Простые числа**

Цель ИВЛПР № 7: изучение простых чисел, решета Эратосфена, разложения числа на простые множители.

ИВЛПР № 7 направлена на достижение следующих результатов.

#### Предметные:

1. Умение оперировать понятиями простое и составное число.
2. Умение определять, простым или составным является конкретное натуральное число.

#### Метапредметные:

1. Формирование умения формулировать гипотезы, намечать пути и способы их проверки.

2. Формирование умения устанавливать справедливость предположений, интерпретировать полученные результаты.
3. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.
4. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.
5. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
6. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Некоторые свойства простых чисел»,

ИЭОМ № 2. «Решето Эратосфена»,

ИЭОМ № 3. «Разложение числа на простые множители»,

ИЭОМ № 4. «Гипотеза Гольдбаха».

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной школе или в старшей школе при подготовке учащихся к ЕГЭ.

ИЭОМ № 1. «Некоторые свойства простых чисел» и ИЭОМ № 3. «Гипотеза Гольдбаха» расширяют программное содержание за счет изучения дополнительных свойств натуральных чисел.

ИЭОМ № 2. «Решето Эратосфена» и ИЭОМ № 3. «Разложение числа на простые множители» позволяют учащимся основной школы изучить материал с большей самостоятельностью, учителю оптимизировать аудиторное время, а старшеклассникам самостоятельно вспомнить соответствующие алгоритмы работы с числами.

Предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 могут предлагаться для выполнения учащимся в любой последовательности как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении.

Интерактивные модули могут предлагаться на этапе введения нового материала. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы.

Другой вариант использования предлагаемой работы на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

Работа может быть использована в технологии «перевернутый класс», когда учащимся предлагается самостоятельно (дома или в классе) выполнить один или несколько интерактивных модулей, а затем при необходимости задать учителю возникшие вопросы.

На этапе закрепления изученного материала интерактивные модули могут быть предложены не самым сильным ученикам для дополнительной отработки изученных фактов.

Сильным учащимся на этом этапе может быть предложена самостоятельная или проектная работа в Свободной Лаборатории для получения новых выводов.

Все представленные работы способствуют развитию исследовательской культуры учащихся за счет поиска ими закономерностей, проверки истинности математических утверждений, подбора примеров, контрпримеров и пр.

При выполнении ИЭОМ № 1. «Некоторые свойства простых чисел» учащиеся получают возможность выявить закономерности, наблюдаемые для простых чисел, и обобщить их свойства.

Первая часть модуля связана с четностью и нечетностью простых чисел.

Вторая часть связана с расположением простых чисел в натуральном ряду.

При выполнении ИЭОМ № 2. «Решето Эратосфена» учащимся предстоит узнать один из способов нахождения простых чисел.

ИЭОМ № 3. «Разложение числа на простые множители» направлена на формулировку вывода о количестве способов разложения числа на простые множители. Его выполнение поможет лучше понять роль простых чисел в математике и «открыть» основополагающую теорему арифметики.

Результатом выполнения ИЭОМ № 4. «Гипотеза Гольдбаха» должна стать формулировка выводов о представлении чисел в виде суммы простых слагаемых. Этот модуль позволяет вам повторить путь ученых-математиков и открыть интересные свойства, связанные с простыми числами, некоторые из которых еще не доказаны.

## **РАБОТА 8. Признаки делимости**

Цель ИВЛПР № 8: изучение признаков делимости на 6, 11, 15 и т. д., делимости суммы и произведения чисел.

ИВЛПР № 8 направлена на достижение следующих результатов.

Предметные:

1. Формирование умения оперировать понятиями: делимость натуральных чисел, делитель, кратное.

2. Формирование умения доказывать и использовать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11.

3. Формирование умения доказывать и использовать признаки делимости произведения чисел, суммы и разности чисел.

4. Формирование умения доказывать и использовать свойства делимости.

Метапредметные:

1. Формирование умения формулировать гипотезы, намечать пути и способы их проверки.

2. Формирование умения устанавливать справедливость предположений, интерпретировать полученные результаты.

3. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

4. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.

5. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.

6. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной школе или в старшей школе при подготовке к ЕГЭ.

В лабораторной работе учащиеся выполняют задания, связанные с «открытием» и использованием различных признаков и свойств делимости, которые упрощают вычисления.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Признак делимости на 11»,

ИЭОМ № 2. «Делимость произведения»,

ИЭОМ № 3. «Делимость суммы и разности»,

ИЭОМ № 4. «Признак делимости на произведение взаимно простых чисел».

Интерактивные модули «Признак делимости на 11» и «Признак делимости на произведение взаимно простых чисел» расширяют программное содержание за счет изучения дополнительного материала. Интерактивные модули ЛР «Делимость произведения», «Делимость суммы и разности» позволяют учащимся основной школы изучить материал с большей самостоятельностью, а учителю оптимизировать аудиторное время, а старшеклассникам самостоятельно вспомнить соответствующие свойства делимости.

Предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 могут предлагаться для выполнения учащимся в любой последовательности как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении.

Интерактивные модули могут предлагаться на этапе введения нового материала. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и ещё раз сформулировать полученные выводы.

Другой вариант использования предлагаемой работы на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

Также работа может быть использована в технологии «перевернутый класс», когда учащимся предлагается самостоятельно (дома или в классе) выполнить один или несколько интерактивных модулей, а затем при необходимости задать учителю возникшие вопросы, обсудить проблемы, связанные с пониманием материала модулей.

На этапе закрепления изученного материала интерактивные модули могут быть предложены не самым сильным ученикам для дополнительной отработки изученных фактов.

Сильным учащимся на этом этапе может быть предложена самостоятельная или проектная работа в Свободной Лаборатории для получения новых выводов.

Все работы способствуют развитию исследовательской культуры учащихся за счет поиска ими закономерностей, обобщения, формулировки гипотез, проверки истинности математических утверждений, подбора примеров, контрпримеров и пр.

#### ИЭОМ № 1. «Признак делимости на 11»

При выполнении этого модуля лабораторной работы учащимся предстоит выявить закономерность, наблюдаемую при делимости чисел на 11, вывести признак делимости на 11, сформулировать его: «Если в числе сумма цифр, стоящих на нечетных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на четных местах на 0 или величину, кратную 11, то это число делится на 11».

А затем потренироваться в его применении.

#### ИЭОМ № 2. «Делимость произведения»

Выполняя первую часть модуля лабораторной работы, учащимся предстоит «открыть» для себя свойство делимости произведения на число, которое дополнительно поможет при вычислениях.

Во второй части модуля учащиеся узнают секрет одного из числовых фокусов, основанный на свойстве делимости произведения.

#### ИЭОМ № 3. «Делимость суммы и разности»

Модуль посвящен получению нескольких свойств делимости (1–3 части). А выполнение заключительной части модуля позволит узнать еще один способ нахождения общих делителей чисел.

ИЭОМ № 4. «Признак делимости на произведение взаимно простых чисел»

При выполнении этого модуля лабораторной работы учащимся предстоит на основании уже известных признаков делимости вывести новые признаки делимости, в частности на 6, 15, выявить закономерность их получения.

## **РАБОТА 9. Движения плоскости**

**Цель ИВЛПР № 9:** научиться строить образы фигур, которые получаются в результате параллельного переноса, осевой симметрии, центральной симметрии и поворота; получить новые знания о свойствах параллельного переноса, осевой симметрии, центральной симметрии и поворота.

ИВЛПР № 9 направлена на достижение следующих результатов.

### Предметные:

1. Выявлять и характеризовать существенные свойства движений плоскости.
2. Формулировать гипотезы о свойствах композиции движений плоскости.
3. Применять движения плоскости для конструирования орнаментов.

Метапредметные:

1. Формирование умения делать выводы.
2. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент/исследование.
3. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.
4. Владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
5. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Признак делимости на 11»,

ИЭОМ № 2. «Делимость произведения»,

ИЭОМ № 3. «Делимость суммы и разности»,

ИЭОМ № 4. «Признак делимости на произведение взаимно простых чисел».

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной или старшей школе при изучении движений плоскости.

Желательно использовать предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2 и ИЭОМ № 3 в той последовательности, в которой они предлагаются в работе. Их можно использовать как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении.

Предлагаемые интерактивные модули могут предлагаться на этапе введения нового материала. Сильным учащимся интерактивный модуль № 2 может быть предложен в качестве домашнего задания. Учащимся, в большей степени ориентированным, кроме математики, на освоение гуманитарных наук, рекомендуется интерактивный модуль № 3. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы и результаты.

Еще один вариант использования предлагаемой работы на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

На этапе закрепления изученного материала интерактивный модуль № 1 может быть предложен не самым сильным ученикам для отработки изученных фактов.

## **РАБОТА 10. Равновеликие и равноставленные фигуры**

Цель ИВЛПР № 10: изучение равновеликих и равноставленных фигур, установление свойств и связей между равновеликостью и равноставленностью фигур.

ИВЛПР № 10 направлена на достижение следующих результатов.

Предметные:

1. Познакомиться с равновеликими и равносторонними фигурами и телами.
2. Установить некоторые связи между равносторонними и равновеликими фигурами.
3. Получить опыт перестраивания фигур в равновеликие.

Метапредметные:

1. Самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.
2. Владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
3. Оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

ИЭОМ № 1. «Перестраивание параллелограмма в прямоугольник»,

ИЭОМ № 2. «Перестраивание параллелограмма в другие равновеликие фигуры»,

ИЭОМ № 3. «Перестраивание треугольника в равновеликие фигуры»,

ИЭОМ № 4. «Равносторонность равновеликих фигур».

Тема «Равновеликие и равносторонние фигуры» — небольшая по объему и сложная по содержанию. Если равновеликость равносторонних фигур после знакомства с определениями понятий ни у кого не вызывает сомнений, то равносторонность равновеликих была отражена в третьей проблеме Гильберта, поэтому мы посчитали возможным завершить данную работу формулировками теорем Бойяи-Гервина и Дена. Наиболее сложной для восприятия школьника является четвертая часть работы. В первой, второй и

третьей рассматривается перестраивание фигур в равновеликие, поэтому они могут выполняться как на уроке, так и во внеурочное время, а заключительная работа рекомендуется для выполнения и обсуждения на уроке. Ученикам, проявившим интерес к этим вопросам, следует рекомендовать книги В. Г. Болтянского и И. М. Смирновой из списка литературы.

При доказательстве ряда формул площадей многоугольников ученикам предлагается выполнить перестраивание фигуры в равновеликую, площадь которой известна. При выполнении работы предстоит обратиться к вопросам перестраивания параллелограммов и треугольников в равновеликие фигуры и установить связь между равноставленностью и равновеликостью многоугольников. Кроме этого, предполагается ответить на вопрос о наличии аналогичной связи у равновеликих многогранников.

При включении в процесс обучения данной ИВПЛР учителю рекомендуется обратить внимание на исторический аспект этого вопроса. А именно: или самому рассказать о том, что прием перестраивания используется в геометрии с давних времен, и о том, что связь равновеликости и равноставленности фигур также давно интересовала математиков. Или предложить учащимся самостоятельно найти информацию по этому вопросу и подготовить небольшой рассказ, наполнив его примерами.

#### ИЭОМ № 1. «Перестраивание параллелограмма в прямоугольник»

В этом модуле учащимся предстоит выполнить операцию перестраивания параллелограммов в прямоугольники. Эта работа может быть предложена учащимся, независимо от уровня их подготовки и уровня изучения математики: и в классах с базовым уровнем освоения математического содержания, и в классах, в которых математика изучается на углубленном уровне.

ИЭОМ № 2. «Перестраивание параллелограмма в другие равновеликие фигуры»

В этом модуле учащимся предлагается установить, в какие равновеликие фигуры, отличные от прямоугольника, может быть перестроен параллелограмм. Эта работа более высокого уровня сложности. В классах с базовым уровнем обучения математике она может предлагаться учащимся, мотивированным на изучение математики, уровень математической подготовки которых выше среднего. При этом она может быть предложена как для индивидуальной, так и для групповой работы. В том случае, если работа предлагается большей части класса, ее результаты целесообразно обсудить на уроке.

### ИЭОМ № 3. «Перестраивание треугольника в равновеликие фигуры»

В этом модуле учащимся предлагается выяснить, в какие фигуры можно перестроить треугольники. В работе предлагаются 4 задания. В этой работе учащиеся проводят эксперименты, позволяющие выяснить, в какие равновеликие фигуры можно преобразовать треугольник.

Эта работа по уровню сложности отличается от предыдущей. Она более сложная. Если в классе с углубленным изучением математики ее целесообразно выполнить всем или большинству учащихся, то в классах базового уровня она может быть предложена на факультативе или в качестве дополнительного задания.

### ИЭОМ № 4. «Равносоставленность равновеликих фигур»

Эта работа занимает особое место в цикле, так как в ней обсуждается возможность истинности обратного утверждения: будут ли равносоставленными равновеликие фигуры.

Выполняя задания этого модуля, учащиеся получают возможность узнать о том, как был этот вопрос решен математиками и какое отношение к этому имеет третья проблема Гильберта.

Этот модуль целесообразно предлагать учащимся в классах с углубленным обучением математике в качестве дополнительного задания для

индивидуальной или групповой работы с последующим обсуждением в классе.

## **РАБОТА 11. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия**

Цель ИВЛПР № 11: изучение свойств бесконечно убывающей геометрической прогрессии и нахождение ее суммы.

ИВЛПР № 11 направлена на достижение следующих результатов.

### Предметные:

1. Формирование умения учиться составлять бесконечно убывающие геометрические прогрессии.
2. Формирование умения применять знания о бесконечно убывающих геометрических прогрессиях при решении геометрических задач.
3. Формирование умения использовать формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для перевода бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную.

### Метапредметные:

1. Формирование умения формулировать гипотезы, намечать пути и способы их проверки.
2. Формирование умения устанавливать справедливость предположений, интерпретировать полученные результаты.
3. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей алгебраических и геометрических объектов между собой.
4. Формирование умения самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.

5. Овладение способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
6. Формирование умения оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:

- ИЭОМ № 1. «Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии»,  
ИЭОМ № 2. «Конструируем бесконечно убывающие геометрические прогрессии и находим их суммы. Часть 1»,  
ИЭОМ № 3. «Конструируем бесконечно убывающие геометрические прогрессии и находим их суммы. Часть 2»,  
ИЭОМ № 4. «Применяем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию к решению задач».

Понятие геометрической прогрессии не является новым для учащихся. Они уже научились решать задачи на использование формул  $n$ -го члена прогрессии и суммы первых  $n$  членов прогрессии. При изучении темы «Прогрессии» не делают акцент на величину знаменателя геометрической прогрессии. Знаменатель может быть как больше единицы, так и меньше единицы. При изучении темы «Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия» геометрические прогрессии, знаменатель которых по модулю меньше единицы выделяют в особую группу, т. к. именно эти прогрессии могут быть использованы при решении некоторых типов задач. При этом оговаривается, что для этого вида прогрессий сохраняются все свойства и формулы, выведенные для геометрических прогрессий.

Лабораторная работа «Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия» является продолжением лабораторной работы «Прогрессии». Цель этой работы: вывод формулы для вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и разбор задач, в основе решения которых лежит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Предлагаемую лабораторную работу целесообразно использовать при изучении бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули ИЭОМ № 1, ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 и ИЭОМ № 4 могут быть предложены для выполнения учащимся в следующей последовательности: ИЭОМ № 1 обязательно, затем ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 как вместе, так и отдельно, и ИЭОМ № 4 обязательно.

Модуль ЛР № 1 может быть предложен на как этапе введения нового материала, так и на этапе его закрепления. На этапе введения нового материала модуль можно использовать для самостоятельного изучения материала, т. е. для самостоятельной работы учащихся. После того как учащиеся самостоятельно выполняют все задания, необходимо коллективно обсудить полученные результаты. Можно использовать этот модуль и для коллективной работы в классе, предлагая последовательно выполнять задания, обсуждать полученные результаты и отвечать на вопросы. На этапе закрепления нового материала модуль может быть использован для самостоятельной работы и как материал для проверочной работы.

ИЭОМ № 2, ИЭОМ № 3 используются на этапах закрепления и применения нового материала для самостоятельной работы учащихся или для коллективной работы в классе. Также они могут быть предложены в качестве домашнего задания. После того как модули выполнялись в самостоятельном режиме в классе или дома, рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы. Также можно один из модулей выполнить в классе, второй дать домой. При обсуждении результатов работы с модулями необходимо обратить внимание учащихся на то, что они получили важное утверждение: не всякая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является убывающей последовательностью.

Умение преобразовывать бесконечную десятичную периодическую дробь в обыкновенную является важной составляющей умения выполнять

вычисления. ИЭОМ № 4 направлен именно на формирование этого умения. Его можно использовать для коллективной работы на этапе применения в качестве домашнего задания. Перед тем как учащиеся приступят к выполнению модуля, необходимо проговорить, что мы называем простой, а что составной бесконечной десятичной периодической дробью. После выполнения модуля учащиеся должны сформулировать последовательность шагов, которые позволят переводить любую бесконечную десятичную периодическую дробь в обыкновенную.

## **РАБОТА 12. Подобие**

Цель ИВЛПР № 12: изучение свойств и построение подобных фигур.

ИВЛПР № 12 направлена на достижение следующих результатов.

Предметные:

1. Сформулировать и экспериментально обосновать признаки подобия треугольников.
2. Экспериментально обосновать свойства подобных треугольников.
3. Познакомиться с разными способами построения подобных треугольников.

Метапредметные:

1. Самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого исследования.
2. Владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
3. Оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.
4. Формирование умения формулировать гипотезы.

5. Формирование умения делать выводы на основе анализа результатов эксперимента.
6. Формирование умения проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:  
ИЭОМ № 1. «Изучение соотношений в прямоугольном треугольнике»,  
ИЭОМ № 2. «Изучение соотношений в произвольном треугольнике»,  
ИЭОМ № 3. «Поиск свойств подобных треугольников»,  
ИЭОМ № 4. «Построение подобных треугольников и применение подобия при решении задач».

Тема «Подобие» — одна из важнейших тем школьного курса геометрии, поскольку имеет большое теоретическое и прикладное значение. До настоящего времени существуют разные взгляды на ее изучение в классах с углубленным изучением математики: в классическом варианте в логике учебника Л. С. Атанасяна, после изучения векторов и движений в логике учебника А. Д. Александрова, с большим количеством теоретических фактов с использованием подобия для их обоснования в логике учебника А. Г. Мерзляка.

Строя серию лабораторных работ по теме, мы придерживались первого подхода.

В первой работе учащиеся исследуют прямоугольные треугольники, готовятся формулировать признаки их подобия, но эта терминология не используется, а также устанавливают, что в прямоугольных треугольниках отношения катетов и отношения катетов к гипотенузе определяются только величиной угла, что позволит учителю ввести тригонометрические функции острого угла треугольника.

Во второй работе, проводя эксперименты, ученики имеют возможность вывести определение и признаки подобных треугольников.

В третьей работе ученики экспериментально установят ряд свойств подобных треугольников.

Четвертая работа посвящена использованию метода подобия для обоснования утверждений. Рассматривается несколько утверждений, работая с которыми ученики получают опыт самостоятельной деятельности по поиску решения задач на доказательство.

#### ИЭОМ № 1. «Изучение соотношений в прямоугольном треугольнике»

В этом модуле учащимся представляется возможность последовательно установить связь сторон равнобедренного прямоугольного треугольника, прямоугольного треугольника с углом 30 градусов, двух произвольных прямоугольных треугольников с равными острыми углами.

#### ИЭОМ № 2. «Изучение соотношений в произвольном треугольнике»

В этом модуле учащиеся могут установить, какие треугольники можно считать подобными. И как установить, подобны ли треугольники.

#### ИЭОМ № 3. «Поиск свойств подобных треугольников»

В этом модуле учащиеся проводят эксперименты, позволяющие выдвинуть гипотезы о свойствах подобных треугольников.

ИЭОМ № 4. «Построение подобных треугольников и применение подобия при решении задач»

В этом модуле учащиеся узнают несколько интересных фактов, связанных с подобием, поймут, как используется метод подобия при решении задач, получают новый опыт самостоятельного поиска решения геометрических задач.

## РАБОТА 13. Преобразования графиков функций

Цель ИВЛПР № 13: научиться выполнять элементарные преобразования графиков функций — линейные преобразования графика функции или ее аргумента (параллельный перенос вдоль осей, симметрия относительно осей, сжатие и растяжение) и операции с использованием модуля.

ИВЛПР № 13 направлена на достижение следующих результатов.

### Предметные:

1. Выявлять и характеризовать существенные признаки преобразований графиков функций.
2. Выявлять математические закономерности преобразования графиков, взаимосвязь между формулой и графиком — аналитической и графической формой представления содержания.

### Метапредметные:

1. Формулировать гипотезы о свойствах преобразований графиков функций.
2. Делать выводы на основе анализа взаимосвязи между формулой и графиком.
3. Проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой, самостоятельно выбирая параметры изменения объекта.
4. Самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.
5. Владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи.
6. Оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели.

- В лабораторной работе предлагаются 4 интерактивных модуля:
- ИЭОМ № 1. «Преобразование графика функции. Сдвиги вдоль осей координат»,
  - ИЭОМ № 2. «Преобразование графика функции. Растяжение и сжатие вдоль осей координат»,
  - ИЭОМ № 3. «Преобразование графика функции. Симметрия относительно осей координат»,
  - ИЭОМ № 4. «Преобразование графика функции. Преобразования графиков функций, связанные с модулем».

Предлагаемая лабораторная работа может быть использована в процессе обучения математике в основной или старшей школе при изучении преобразований графиков функций: квадратичных, дробно-линейных, композиции любой изучаемой функции  $y = f(x)$  с линейной для получения выводов о связи графика произвольной функции с графиками функций  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$ ,  $y = mf(x)$ ,  $y = f(kx)$ ,  $y = f(-x)$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(|x|)$  и  $y = |f(x)|$ .

Предлагаемые в лабораторной работе интерактивные модули № 1, № 2, № 3 и № 4 могут использоваться для выполнения учащимся в любой последовательности как вместе, так и отдельно, в соответствии с логикой изучения учебного содержания, предусмотренного рабочей программой по математике, реализуемой в образовательном учреждении.

Предлагаемые интерактивные модули могут предлагаться на этапе введения нового материала. При этом учитель может изменить функцию, с которой работают учащиеся, или предложить им ввести ее самостоятельно. Перед изучением нового преобразования соответствующий интерактивный модуль может быть предложен в качестве домашнего задания. После этого рекомендуется на уроке, в режиме коллективного обсуждения, подвести итоги и еще раз сформулировать полученные выводы.

Еще один вариант использования предлагаемой работы на этапе введения нового материала — как основы для организации фронтальной работы в классе. В этом случае учитель сам или с помощью учеников, вызванных им к доске, выполняет последовательность действий, предлагаемых в работе, обсуждая промежуточные результаты и выводы.

На этапе закрепления изученного материала интерактивные модули могут быть предложены не самым сильным ученикам для отработки изученных фактов.

Сильным учащимся на этом этапе может быть предложена самостоятельная работа в Свободной Лаборатории для получения новых выводов с целью их использования при построении графиков более сложных функций.

ИЭОМ № 1. «Преобразование графика функции. Сдвиги вдоль осей координат»

Целью данного модуля является формулировка вывода о связи графика функции  $y = f(x)$  с графиками функций  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$  на основе исследования взаимного расположения графиков функций  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$ , при разных значениях параметров  $a$  и  $b$ .

При выполнении этой части лабораторной работы вам предстоит понаблюдать, как связано расположение графиков функций  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$  с графиком функции  $y = f(x)$ . Для этого вам будет предложено последовательно выбрать несколько (не менее 6) значений параметров  $a$  и  $b$  и проанализировать, как зависит расположение получающегося графика от этих значений.

Для того чтобы разница между графиком функции и графиками функций была ясно заметна на плоскости, целесообразно обратить внимание учащихся на то, что следует выбирать значения параметров, по модулю не меньше половины единичного отрезка. В противном случае изменение положения графика будет не очень заметно.

В работе 2 части.

Первая часть связана с исследованием взаимного расположения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = f(x) + b$ .

Вторая часть связана с исследованием взаимного расположения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = f(x - a)$ .

В каждой части после выполнения серии опытов учащимся нужно будет обобщить свои наблюдения, ответив на 3 вопроса: сформулировать выводы, заполнив пропуски или выбрав правильный вариант ответа.

ИЭОМ № 2. «Преобразование графика функции. Растяжение и сжатие вдоль осей координат»

Целью модуля является формулировка вывода о связи графика функции с графиками функций  $y = mf(x)$ ,  $y = f(kx)$  — на основе исследования взаимного расположения графиков функций, при разных значениях параметров  $k$  и  $m$ .

При выполнении этой части лабораторной работы вам предстоит понаблюдать, как связано расположение графиков функций  $y = mf(x)$ ,  $y = f(kx)$  с графиком функции  $y = f(x)$ . Для этого вам будет предложено последовательно выбрать несколько (не менее 6) значений параметров  $k$  и  $m$  и проанализировать, как зависит расположение получающегося графика от этих значений.

Для того чтобы разница между графиком функции и графиками функций была ясно заметна на плоскости, целесообразно обратить внимание учащихся на то, что следует выбирать значения параметров, не менее чем в 1,5 раза отличающиеся от 1. В противном случае изменение положения графика будет не очень заметно.

В работе 2 части.

Первая часть связана с исследованием взаимного расположения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = mf(x)$ .

Вторая часть связана с исследованием взаимного расположения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = f(kx)$ .

ИЭОМ № 3. «Преобразование графика функции. Симметрия относительно осей координат»

**Цель модуля** — сформулировать вывод о связи графика функции  $y = f(x)$  с графиками функций  $y = f(-x)$ ,  $y = -f(x)$  на основе исследования взаимного расположения графиков функций.

При выполнении этой части лабораторной работы учащимся предстоит понаблюдать, как связано расположение графиков функций  $y = f(-x)$ ,  $y = -f(x)$  с графиком функции  $y = f(x)$ . Для этого им предлагается последовательно выбрать несколько (не менее 6) функций из списка или ввести функции самостоятельно, затем выбрать инструмент «построить график функции» и получить график. Затем, последовательно выбирая инструмент «построить график функции» (1 часть работы) или «построить график функции» (2 часть работы), проанализировать, как связаны графики этих функций с графиком выбранной функции.

Целесообразно выбирать (или конструировать) для построения функции, максимально не похожие друг на друга.

В работе 2 части.

Первая часть связана с исследованием взаимного расположения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = f(-x)$ .

Вторая часть связана с исследованием взаимного расположения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = -f(x)$ .

ИЭОМ № 4 «Преобразование графика функции. Преобразования графиков функций, связанные с модулем»

**Цель:** сформулировать вывод о связи расположения графика функции  $y = f(x)$  графиками функций  $y = f(|x|)$  и  $y = |f(x)|$  на основе исследования взаимного расположения графиков функций.

При выполнении этой части лабораторной работы учащимся предстоит понаблюдать, как связано расположение графиков функций  $y = f(|x|)$  и  $y = |f(x)|$  с графиком функции  $y = f(x)$ . Для этого они должны последовательно выбрать несколько (не менее 6) функций из списка или ввести функции самостоятельно, затем выбрать инструмент «построить график функции» и получить график. Затем, последовательно выбирая инструмент «построить график функции» (1 части работы) или «построить график функции» (2 часть работы), проанализировать, как связаны графики этих функций с графиком выбранной функции.

Целесообразно выбирать (или конструировать) для построения функции, максимально не похожие друг на друга.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дорофеева Л.Г. Проведение лабораторных и практических работ на уроках математики [Электронный ресурс] // Материалы конференции «Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и ВУЗе», 2014 — С. 128–130. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22470889>.
2. Епифанова Н.М. Проведение лабораторных и практических работ на уроках математики [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://refdb.ru/look/2184712.html>.
3. Саяпина Н.В. Роль и место лабораторных работ в практике обучения школьников математике [Электронный ресурс] // Материалы конференции «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования», 2016 — С. 287–294. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27615689>.
4. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. — М.: Издательский дом Академии естествознания, 2016. — 300 с.
5. Naara F.O. Unveiling teachers' reasons for choosing practical activities in mathematics teaching [Электронный ресурс]. Режим доступа: [https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/id/113756/40285\\_Naara\\_MainThesis.pdf](https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/id/113756/40285_Naara_MainThesis.pdf).
6. Hynes M.E., Hynes M., Mercella L. Kysilka, Brumbaught D. Mathematics Laboratories: What Does Research Say? [Электронный ресурс]. Режим доступа: [http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed\\_lead/el\\_197312\\_hynes.pdf](http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_197312_hynes.pdf).
7. Wilkinson J.D. A laboratory method to teach geometry in selected sixth grade mathematics classes. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://lib.dr.iastate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5808&context=rtd>.