ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ
И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Федеральное государственное
бюджетное научное учреждение

МЕТОДИЧЕСКИЙ КЕЙС

/МАТЕМАТИКА. 10-11 КЛАССЫ/

МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЫ:

РАСТАШАНСКАЯ
ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА,
к.п.н., начальник управления
педагогического проектирования
ФГБНУ ИСМО

БАРАКОВА
ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА,
к.п.н.
ведущий эксперт ФГБНУ ИСМО

г. Москва
2024г.

Аннотация. Методический кейс направлен на развитие методических компетенций педагогических работников.

Выбор темы кейса обусловлен обновлением содержания учебного курса «Алгебра и начала математического анализа» в 10 классе с одной стороны, отсутствием содержания темы в действующих учебниках и затруднениями педагогов в преподавании темы в школе – с другой стороны.

Между тем, дополнение школьного курса математики данной темой позволяет сократить дистанцию между школой и вузом, способствует преемственности в обучении. Кроме того, есть задачи ЕГЭ по математике, которые технически можно решать, владея таким способом решения систем, и не только двух линейных уравнений с двумя неизвестными, но и трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Данная тема изучается только в классах с углубленным изучением математики. На базовом уровне системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными решают способами, известными из учебного курса «Алгебра» 7 класса: методом сложения, методом подстановки и графическим методом.

Тема «Системы линейных уравнений» изучается в 10 классе в рамках раздела (темы) «Множество действительных чисел. Многочлены. Рациональные уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений.» Содержание темы:

- Решение систем линейных уравнений.
- Матрица системы линейных уравнений.
- Определитель матрицы 2×2, его геометрический смысл и свойства; вычисление его значения; применение определителя для решения системы линейных уравнений.
- Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.

Ожидаемые предметные результаты:

- □ оперировать понятиями: система линейных уравнений, матрица, определитель матрицы;
- □ использовать свойства определителя 2×2 для вычисления его значения, применять определители для решения системы линейных уравнений;
- □ моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных уравнений, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат.

Считаем необходимым не ограничиваться рассмотрением решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными в школе, а предложить и систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Этот материал изучается в курсе «Линейной алгебры» в вузе с опорой на теорию (теоремы, леммы), выводы, доказательства, обоснования формул, с использованием специальной символики. Оставим это право за вузами. Но уже в школе на доступном языке можно объяснить обучающимся механизм работы с такими системами. Эти навыки могут пригодиться выпускникам на ЕГЭ по математике в решении сюжетных задач, и не только.

Предлагаемый методический кейс носит рекомендательный характер. Материалы будут полезны учителям математики при проектировании занятий по данной теме, а также в решении практических задач. Материалы можно использовать для организации занятий внеурочной деятельности и проектной деятельности, если дополнить и другими интересными способами решения систем линейных уравнений, например, методом Гаусса. Полезно для закрепления изученного материала решение одной и той же системы тремя способами: методом Крамера, матричным способом и методом Гаусса.

Методические рекомендации

Из 24 часов, рекомендуемых федеральной рабочей программой по математике на изучение всех вопросов данного раздела (темы), предлагаем 10 часов уделить изучению систем линейных уравнений.

Содержание и распределение часов могут быть следующими:

- Метод Крамера. Определитель 2-ого порядка системы, определители с замененными коэффициентами при неизвестном системы соответственными свободными членами, формулы для нахождения неизвестных системы. (2ч)
- Понятие матрицы. Матрица коэффициентов системы, определителя системы, обратная матрица, матрица вектора-столбца. Действия с матрицами. Правило умножения матрицы коэффициентов системы на матрицу вектора-столбца. (2ч)
- Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными матричным методом. (2ч)
- Решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом. (2ч)
- Применение матричного метода решения систем линейных уравнений в математическом моделировании при решении задач. (2ч)

Представим возможное проектирование занятий и методику реализации содержания.

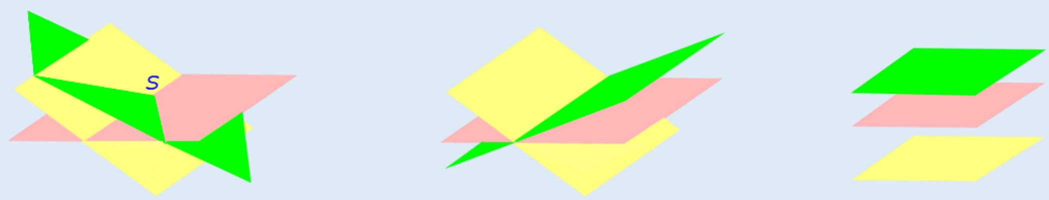
1. Знакомство с методом Крамера можно организовать после повторения всех известных методов решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными: сложения, подстановки, графического. Для этого после повторения, можно предложить обучающимся поработать над текстом теоремы Крамера:

   <u>Теорема.</u>

   *«**Если** определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами».*

1) Для работы над текстом нужно подготовить вопросы для беседы с обучающимися. Например, «Какой термин наиболее часто встречается в тексте, но является незнакомым? (Определитель)», или «Приведите пример системы двух линейных уравнений с двумя переменными и пример системы трех линейных уравнений с тремя переменными. Какова особенность таких систем для применения метода Крамера? (Метод Крамера применяется в решении систем, в которых число неизвестных равно числу уравнений.)».

2) Важным моментом для осмысления количества решений систем линейных уравнений является геометрическая интерпретация взаимного расположения плоскостей.



1 решение (S) ∞ (множество решений) нет решений

Теперь можно на уровне совокупности формул ввести правило Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} k_{11}x + k_{12}y = c_1 \\ k_{21}x + k_{22}y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21} \quad (1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & k_{12} \\ c_2 & k_{22} \end{vmatrix} = c_1 \cdot k_{22} - k_{12} \cdot c_2 \quad (2),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k_{11} & c_1 \\ k_{21} & c_2 \end{vmatrix} = k_{11} \cdot c_2 - c_1 \cdot k_{21} \quad (3),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Ответ: (x; y).

При введении формул Крамера, необходимо:

- сделать акцент на индексах при переменных, а именно: на первом месте стоит порядковый номер строки, на втором – порядковый номер столбца, у свободных членов только один индекс – порядковый номер строки;
- обязательно проговорить условие существования решений системы:

$$\Delta \neq 0;$$

- □ при вычислении определителя по схеме, объяснить знак произведений: зависит не только от знаков множителей, но и от суммы индексов множителей первой строки, то есть, если это k_{11}, то сумма индексов равна 1 + 1 = 2 (четное число, знак «+» перед произведением), а если это k_{12}, то сумма индексов равна 1 + 2 = 3 (нечетное число, знак «−» перед произведением);
- □ введение правила Крамера закрепить на конкретном примере, проговаривая все шаги.

<u>Пример</u>.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}.$$

- «Составим **<u>определитель системы</u>** 2-ого порядка: запишем в первой **<u>строке</u>** коэффициенты при неизвестных x и y первого уравнения, входящего в систему, а во второй строке – x и y второго уравнения так, чтобы коэффициенты одной и той же переменной расположились друг под другом. То есть: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

  Вычислим определитель по схеме: $\Delta = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$ ».
- «Составим **<u>определитель для нахождения переменной $\boldsymbol{x}$</u>**: заменим коэффициенты первого **столбца** на свободные члены. То есть:

  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$.

  Вычислим определитель для нахождения переменной x по схеме:

  $\Delta_x = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 4 + 6 = 10$».
- «Составим **<u>определитель для нахождения переменной $\boldsymbol{y}$</u>**: заменим коэффициенты второго столбца на свободные члены. То есть:

  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

  Вычислим определитель для нахождения переменной y по схеме:

$\Delta_y = 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -9 - 1 = -10$».

- Найдем **<u>решение системы</u>** по формулам Крамера:

  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1.$ <u>Ответ</u>: (1; –1).

2. Теперь, когда обучающиеся освоили правила Крамера, можно переходить к изучению матричного метода:

- вводим понятия: матрицы системы, определителя матрицы системы, единичной матрицы, матрицы миноров, транспонированной матрицы алгебраических дополнений, обратной матрицы;
- объясняем действия с матрицами: «сложение», «вычитание как сложение с противоположным числом», умножение матрицы на число, «деление как умножение на дробь».

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases}.$$

1. Составим **матрицу системы** и найдем **определитель матрицы системы**:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 6 \cdot 1 = -26\,.$$

2. Составим **матрицу, обратную** данной, по шагам.

   1) Найдем **матрицу миноров**:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

   2) Составим **матрицу алгебраических дополнений**:

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Составим **транспонированную матрицу алгебраических дополнений**:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij}^{T} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим **обратную матрицу** по формуле: $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A_{ij}^{T}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-26} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{1}{26} \\ \frac{6}{26} & -\frac{4}{26} \end{pmatrix}$$

3. Найдем **решение системы** по формуле: $\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$,

где матрица $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ – **вектор-столбец свободных членов**.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{1}{26} \\ \frac{6}{26} & -\frac{4}{26} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15+11}{26} \\ \frac{18+(-44)}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ:</u> (1; –1).

Действия с матрицами

1) Сложение (вычитание) матриц

<u>Пример</u>

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполните сложение матриц и вычитание матриц

Решение: $A + B = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+(-2) \\ 1+8 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -1+(-3) & 2+2 \\ 1+(-8) & 6+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить каждый элемент матрицы на это число.

Пример. Найдите произведение $3 \cdot \mathrm{A}$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 10 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$.

3) Умножение матрицы на вектор

Алгоритм умножения матрицы на вектор: каждый элемент строки умножаем на элементы столбца, результаты складываем и записываем элементом вектора-столбца как результата.

Пример. Найдите произведение $A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

4) Транспонирование матрицы

Транспонирование матрицы – это операция, когда строка становится соответствующим столбцом, а столбец соответствующей строкой.

Пример

Составьте транспонированную матрицу A^T матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение: $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Все эти понятия и действия нужно закрепить, решая одну и ту же систему тремя способами: методом Крамера, матричным методом и затем традиционным (сложением, подстановкой или графическим).

Содержание темы, согласно федеральной рабочей программе, раскрыто, но решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными, является существенной добавкой к приобретенным знаниям.

Рекомендуем остановиться только на методе Крамера в решении таких систем, причем на реальном задании, а не в общем виде. В вузе будет подведена теоретическая платформа и обоснование формул. А вот на ЕГЭ по математике есть возможность применить этот метод и решить задачи более рационально.

<u>Пример</u> для изучения механизма решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 2x + 5y - z = 4 \\ 4x + y + 3z = 2 \end{cases}.$$

<u>Решение</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 1) - \big(4 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot (-3)\big) = 15 + 12 + 4 - 40 + 1 + 18 = -20.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \cdot 1) - \big(2 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot (-3)\big) = -15 + 6 + 8 - 20 + 1 + 36 = 14;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2) - (4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 3) = 12 + 4 + 8 - 32 + 2 + 6 = 0;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{14}{20} = -0{,}7, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{20} = 0.$$

Ответ: (– 0,7; 0).

Данная тема позволит сформировать у обучающегося умения, необходимые для современного специалиста в любой области: оценивать ситуацию, выстраивать стратегию решения задачи, делать выбор рационального подхода к решению задачи и осознанно выполнять задачу, оценивая свои возможности.

Кроме того, введение данной темы в школьный курс математики – возможность организовать внеурочную деятельность, на занятиях которой можно предложить обучающимся выполнить проекты, способствующие саморазвитию и самосовершенствованию. Это могут быть коллективные проекты, например, о жизни и деятельности ученых-математиков, принимавших участие в создании и развитии линейной алгебры (Уильям Гамильтон, Артур Кэли, Карл Вейерштрасс, Мари Энмон Камиль Жордан, Фердинанд Георг Фробениус, Джеймс Сильвестр, Габриэль Крамер, Карл Фридрих Гаусс и другие ученые); или о применении знаний и умений решать системы уравнений в различных областях жизни, профессиях, науке. Такая деятельность позволит обучающимся в более полной мере раскрыть свой потенциал.

Дополнительная литература

1. В.Г. Чирский, Системы линейных уравнений. Векторы, матрицы. Определитель матрицы/Механико-математический и химический факультеты МГУ имени М.В. Ломоносова/2023 https://www.chem.msu.su/rus/teaching/chirskii/systemy.uravnenij.1.pdf
2. Е.А. Баракова, Методические материалы по обучению матричному методу решения систем линейных уравнений в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа» в 10 классе (углубленный уровень)/ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения»/2024 https://fms.apkpro.ru/files/m_documents/9588/Методические%20материалы_Баракова_Е_А_.pdf
3. И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ), Лекция 4. Правило Крамера. Обратная матрица / Департамент политической науки/2021-22 уч. год http://math-info.hse.ru/a/2021-22/ps-aa/lecture4.pdf