ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ
И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Федеральное государственное
бюджетное научное учреждение

МЕТОДИЧЕСКИЙ КЕЙС

/МАТЕМАТИКА. 10-11 КЛАССЫ/

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

АВТОРЫ:

РАСТАШАНСКАЯ
ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА,
к.п.н., начальник управления
педагогического проектирования
ФГБНУ ИСМО

БАРАКОВА
ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА,
к.п.н.
ведущий эксперт ФГБНУ ИСМО

г. Москва
2024г.

Аннотация. Методический кейс направлен на развитие методических компетенций педагогических работников.

Выбор темы кейса обусловлен с одной стороны значимостью понятия производной при решении задач из других учебных предметов, использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах, необходимостью применения производной, для исследования процессов и зависимостей в реальной жизни, и, с другой стороны, – затруднениями, которые испытывают выпускники 11 классов при решении заданий ЕГЭ по математике профильного уровня на применение производной. На ЕГЭ по математике базового уровня данная тема не проверяется, что влияет на мотивацию к изучению этой темы.

Анализ содержания, размещенного в учебнике, позволяет назвать возможные причины затруднений в освоении темы:

- понятие производной вводится при рассмотрении физической задачи на мгновенную скорость, через **понятие предела** разностного отношения при устремлении к нулю приращения времени (ранее понятие предела не вводилось и дальнейшего продвижения, в части теории пределов, нет); **теория пределов не изучается в школьном курсе математики;**
- строгое определение **предела функции в точке**, с которым тесно связано понятие непрерывности функции, даже с пояснением, **подкреплено в учебнике практикой недостаточно;**
- многие формулы дифференцирования строго **не доказываются, предлагаются без доказательства, на уровне запоминания.**

Таким образом, прослеживается дистанция между предлагаемой теорией и задачами на применение производной. Усилия при изучении понятий, определений по теме «Производная», связанных с теорией пределов, и, практическое обнуление их, в результате невостребованности, в решении последующих заданий, приводят к восприятию темы школьниками в целом, как сложной и труднодоступной. В лучшем случае формируются навыки воспроизведения записи производной в символьном виде, механическое запоминание формул производных элементарных функций, правил дифференцирования, алгоритмов решения задач на применение производной.

Методические рекомендации рассмотрим отдельно для изучения темы на базовом и углубленном уровнях.

1. Производная в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа» **на базовом уровне** изучается в 11 классе. На изучение темы рекомендовано в тематическом планировании ФРП «Математика» 24 часа.

   Основное содержание рассматриваемой темы, согласно федеральной рабочей программе, следующее:

   - Производная функции.
   - Геометрический и физический смысл производной.
   - Производные элементарных функций.
   - Производная суммы, произведения, частного функций.
   - Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы.
   - Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
   - Применение производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах, для определения скорости процесса, заданного формулой или графиком.

   Наибольшую сложность в объяснении и, соответственно, в восприятии обучающимися вызывают: **определение производной и её геометрический смысл.**

   Понятие производной авторы учебника «Алгебра и начала анализа» 10-11 классы (базовый и углубленный уровень), Ю.М. Колягин, Ш.А. Алимов и др., предлагают вводить с опорой на знания учебного курса физики, через понятие мгновенной скорости в решении следующей задачи.

Задача 1 На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

Решение задачи объясняется с помощью физической терминологии: «мгновенная скорость», «средняя скорость», «равномерное движение», «равнозамедленное движение».

Одна из рекомендаций на этапе введения понятия с помощью данной задачи (из учебника): актуализировать все термины, понятия и определения, используемые в решении данной задачи, напомнить определение мгновенной скорости из курса физики 7-9 классов, тема «Кинематика движения».

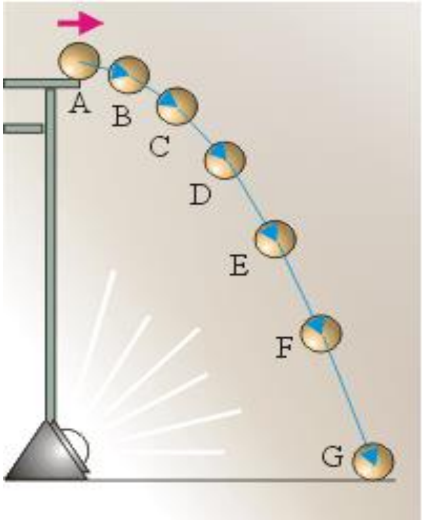
Как любая траектория состоит из бесконечного числа точек, так и любой интервал времени состоит из бесконечного числа мгновений. И если *интервал времени стремится к нулю*, превращаясь в «мгновение», то уже известную вам формулу можно применить для определения *мгновенной скорости* тела:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$$

$\vec{v}$ – мгновенная скорость, м/с
$\vec{s}$ – перемещение тела, м (если $\Delta t \to 0$)
Δt – стремящийся к нулю интервал времени, с

Итак, ***мгновенная скорость*** – *векторная физическая величина, равная отношению перемещения к интервалу времени, за который это перемещение произошло, если интервал времени стремится к нулю.*

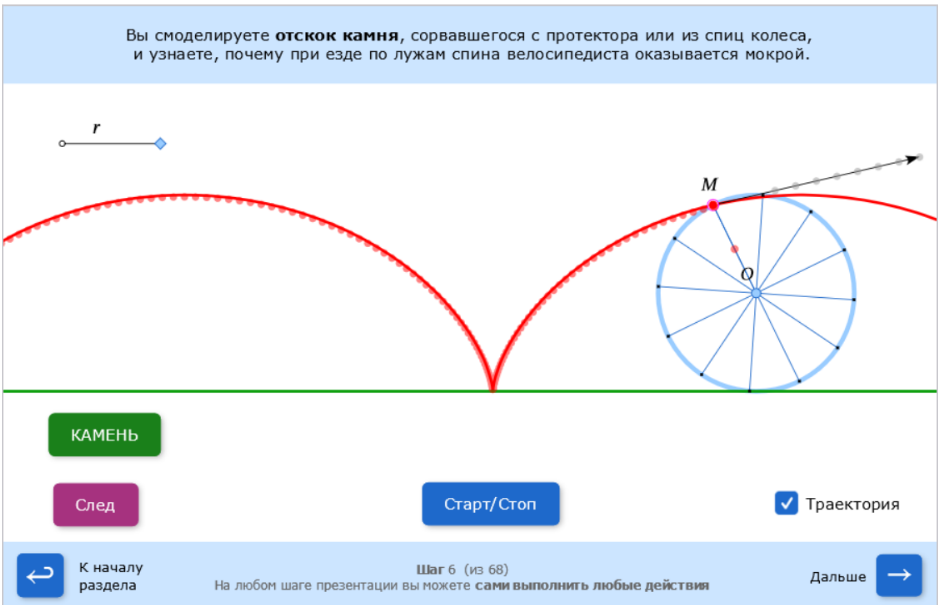
Интервал времени – всегда положительный скаляр, поэтому *вектор мгновенной скорости всегда сонаправлен с вектором перемещения при $\Delta t \to 0$.*



На рисунке траектория полета со стола тяжелого шарика. Например, от точки А за $\Delta t \rightarrow 0$ шарик совершит бесконечно малое перемещение вправо, поэтому и мгновенная скорость в точке А тоже будет направлена вправо.

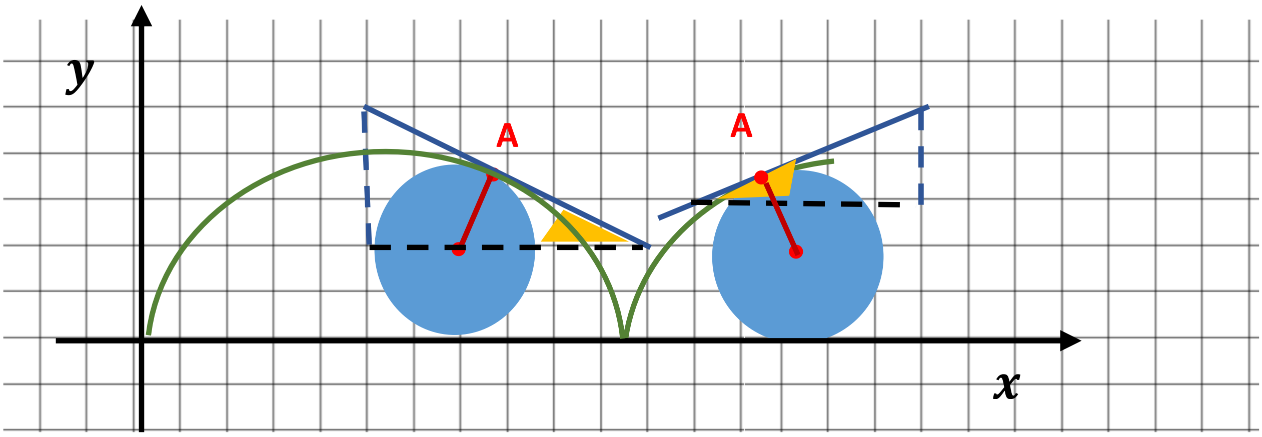
Далее для соотнесения физических и математических знаний неплохо воспользоваться виртуальной лабораторией «Математическое моделирование» на основе динамической программной среды. Лабораторно-практическая работа «Задача об отскочившем камне».

Задача. «Куда отскочит камень, сорвавшийся с протектора шины автомобиля?»



Лабораторно-практическая работа позволяет сначала исследовать готовую модель, а затем создать свою модель, а именно: построить **вектор скорости** на ободе колеса, катящегося без проскальзывания по прямой (с проскальзыванием по прямой) и смоделировать отскок камня от протектора колеса. Наблюдая всякий раз, после очередного опыта, изменения направления вектора скорости, можно видеть в программе таблицу, в которой отражается автоматически вычисленный **тангенс угла наклона вектора скорости с линией движения.**

Параллельно, на листке в клетку, можно начертить систему координат и выбрать ось Оx за линию движения колеса. Затем вырезать из картона круг, поставить на линии окружности точку А и катить круг по линии движения (оси Оx) без скольжения, отмечая траекторию, которую опишет точка А. Полученная линия называется *циклоидой*. Обучающимся можно предложить провести касательные к циклоиде в отдельных положениях точки А и найти тангенс угла наклона касательной с положительным направлением оси Оx.



А затем сравнить полученные результаты с результатами в таблице, сгенерированной в динамической программе. Результаты должны совпасть.

Теперь можно вводить определение производной, проводя параллель с определением мгновенной скорости, обсуждать её физический и геометрический смысл.

2. Производную **на углубленном уровне** начинают изучать в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа» в 10 классе, продолжают в 11

классе. На изучение темы в 10 классе рекомендовано в тематическом планировании ФРП «Математика» 20 часов, в 11 классе – 22 часа.

Основное содержание рассматриваемой темы, согласно федеральной рабочей программе, следующее:

10 класс

- Непрерывные функции и их свойства. Точка разрыва. Свойства функций непрерывных на отрезке. Применение свойств непрерывных функций для решения задач.
- Первая и вторая производные функции. Определение, геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.
- Производные элементарных функций. Производная суммы, произведения, частного и композиции функций.

11 класс

- Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы.
- Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке.
- Применение производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах, для определения скорости и ускорения процесса, заданного формулой или графиком.
- Композиция функций. Геометрические образы уравнений и неравенств на координатной плоскости.

Как видно из содержания ФРП для 10 класса, значительный объем приходится на изучение понятия непрерывности функций. И поскольку, оно связано с понятием предела, то необходимо дополнить содержание ФРП теорией предела, доступной не только обучающимся технологического профиля, где и физика, и информатика изучаются на углубленном уровне, то есть обучающиеся «дружат» с формулами, как инструментом для исследования, обоснования, доказательства, выводов, другое, но и для обучающихся естественно-научного профиля, где основным средством является эксперимент, а также, социально-экономического профиля, где прикладные задачи являются важным мотивационным компонентом изучения математических тем.

Представим последовательность изучения теории пределов в школе для введения понятия «непрерывность функции» в виде следующей схемы.

Предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Основные свойства предела последовательности, арифметические действия с пределами последовательности, вычисление пределов последовательностей

→

Предел функции

$$\lim_{n\to a} f(x) = A,$$

свойства пределов функции, арифметические

действия над пределами функции,

замечательные пределы

→

Определение непрерывности функции в точке,

свойства непрерывных функций,

точки разрыва функции

Такой подход позволит вводить понятие производной на основе физической задачи из учебника в классах профиля технологического направления.

Но для обучающихся профильных классов гуманитарного направления, социально-экономического направления, естественно-научного направления, аграрной направленности, данная задача может быть неинтересна.

Имеет смысл подобрать (создать) задачу соответственно направленности профиля.

Приведем **пример задачи** для профильного класса *естественно-научного направления* на **скорость химической реакции**, где оперируют терминами: «скорость исчезновения исходного вещества», «скорость превращения вещества», «скорость образования продукта».

Задача. При смешении бутилхлорида C_4H_9Cl с водой образуется бутиловый спирт C_4H_9OH и соляная кислота: $C_4H_9Cl(ж) + H_2O(ж) \rightarrow$

C_4H_9OH(водн.) + HCl(водн.). В начальный момент концентрация C_4H_9Cl в смеси составляла 0,1000 моль/дм^3. Экспериментально измерена концентрация C_4H_9Cl в различные моменты времени после смешения бутилхлорида и воды, и получены данные, приведенные в таблице.

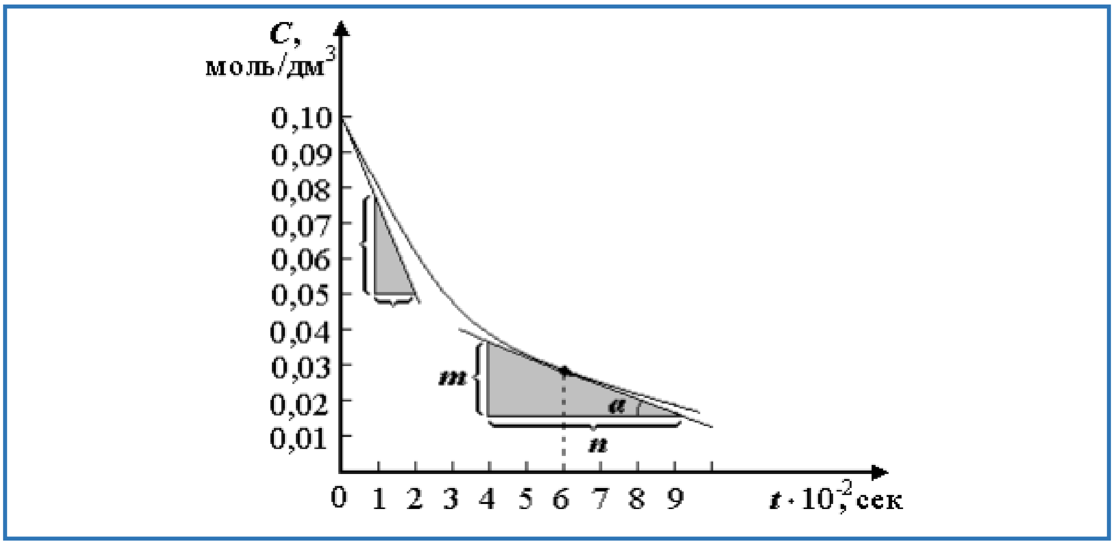
Время, сек	*Концентрация CC_4H_9Cl, моль/дм^3*	*Средняя скорость, моль/дм^3·сек*
0	0,1000	$1{,}90\cdot10^{-4}$
50	0,0905	$1{,}70\cdot10^{-4}$
100	0,0820	?
150	0,0741	?
200	0,0671	?
300	0,05490	?
400	0,0448	?
500	0,0368	?
800	0,0200	?
1000	0	

Экспериментальные данные позволяют определить среднюю скорость превращения C_4H_9Cl в различные промежутки времени. Из таблицы видно, что за промежуток времени, равный 50 сек, концентрация уменьшилась с 0,1000 моль/л до 0,0905 моль/дм^3. Следовательно, средняя скорость реакции за этот 50- секундный промежуток времени составляет:

$$v_{\text{ср.}} = -\frac{(0{,}0905 - 0{,}1000)}{(50 - 0)} = 1{,}9 \cdot 10^{-4} \text{моль/дм}^3 \cdot \text{сек}$$

Аналогичным образом можно вычислить среднюю скорость за другие промежутки времени.

Экспериментальные данные, приведенные в таблице, можно представить в графическом виде, как сделано на рисунке



С помощью кривой, описывающей зависимость концентрации C_4H_9Cl от времени, можно определить ***мгновенную скорость*** **реакции**, т.е. её скорость в конкретный момент времени, а не среднюю скорость за соответствующий промежуток времени. Мгновенная скорость определяется наклоном ***касательной к кривой*** C = *f (t)* в интересующий нас момент времени *ti*.

На рисунке изображены две такие касательные: одна при t = 0, другая при t = 600 сек. **Тангенс угла наклона этих касательных дает значение мгновенной скорости в указанные моменты времени**.

Например, для t = 600 сек имеем: *мгновенная скорость* = $tg\ \alpha = \frac{m}{n} = 0{,}4$.

Работа с такой задачей позволит обучающимся профиля естественно-научного направления с углубленным обучением химии и биологии, провести параллель между математическими терминами, входящими в определение производной и химическими терминами, описывающими химическую реакцию, а затем и геометрический смысл производной воспринять уже на языке математики. Кроме того, задача химического содержания придает значимость новой темы при изучении содержания профильной дисциплины.

В 11 классе для всех профильных классов, любой направленности, ключевые темы связаны с применением производной в решении задач на исследование функции, построение графика функции, решение прикладных задач на поиск наилучшего решения, описания скорости протекания процесса, другое.

Методическая рекомендация для развития интереса к изучению темы.

Тщательно подбирать текст заданий для изучения и закрепления алгоритмов решения задач на применение производной к исследованию функций, построению графиков, задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на указанном отрезке.

Приведем **пример задачи** для обучающихся профильного класса гуманитарного направления, с углубленным изучением литературы, английского языка.

Задача.

Можно предложить обучающимся найти площадь земли, которую крестьянин Пахом покупает у башкирцев в рассказе Л.Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно?». Для постановки математической задачи нужно использовать привычную форму деятельности для таких обучающихся: *чтение нужного фрагмента произведения, рассуждения.*

Задание: 1) Найдите в произведении фрагмент о покупке земли Пахомом. Вычислите периметр и площадь обозначенного участка.

2) Ответьте на вопрос: «Наибольшая ли площадь найдена?»

Фрагмент

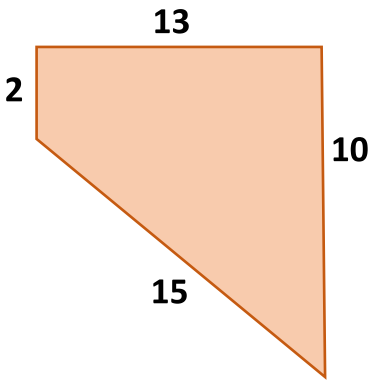
– «А цена какая будет? – говорит Пахом.
– Цена у нас одна: 1000 р. за день.
  Не понял Пахом.
– Какая же это мера – день? Сколько в ней десятин будет?
– Мы этого, – говорит, не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена 1000 р.
  Удивился Пахом.
– Да ведь это, – говорит, – в день обойти земли много будет.
  Засмеялся старшина.

– Вся твоя, – говорит. – Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

– А как же, – говорит Пахом, отметить, где я пройду?

– А мы станем на место, где ты облюбуешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скребку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дернички клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.»

Фигура, которая получилась у Пахома, изображена на рисунке.

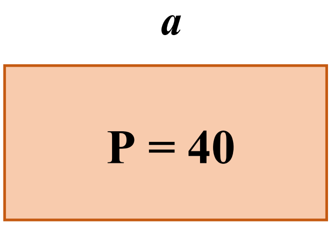


$$P = 2 + 13 + 10 + 15 = 40 \text{ (км)};$$

1) $$S = \frac{2 + 10}{2} \cdot 13 = 78 \text{ (км}^2\text{)}.$$

2) обоснованного ответа нет (проблема).

Учитель предлагает алгоритм нахождения наибольшего значения функции на отрезке, используя данные задачи, работая с прямоугольником.



$$b = \frac{40 - 2a}{2} = 20 - a, \quad 0 < a < 20$$

АЛГОРИТМ

$$f(a) = a \cdot (20 - a) = 20a - a^2;$$

$$f'(a) = 20 - 2a;$$

$$f'(a) = 0; \quad 20 - 2a = 0; \quad a = 10; \quad b = 20 - 10 = 10;$$

$f'(a)$ + max – a

$f(a)$ ↗ 10 ↘

$$S = f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

или проще

$$S = a \cdot b = 10 \cdot 10 = 100(\text{км}^2).$$

Сам алгоритм можно зафиксировать в виде **«цепочки»:**

1 шаг	2 шаг	3 шаг	4 шаг	5 шаг
$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x) = 0$	x_{max}	$f(x_{\max})$

Кроме алгоритма можно сформулировать **дополнительный вывод:** «Из всех прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.»

Далее закрепить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на указанном отрезке решением упражнений из учебника.

Интернет-ресурсы

1. Урок 7. Предел последовательности https://resh.edu.ru/subject/lesson/4921/conspect/200886/
2. Урок 8. Предел функции на бесконечности https://resh.edu.ru/subject/lesson/3932/start/327093/
3. Урок 9. Предел функции в точке. Непрерывность функции. https://resh.edu.ru/subject/lesson/6112/conspect/200948/
4. Урок 10. Определение производной. Физический смысл производной. https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/start/200980/