МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

МЕТОДИЧЕСКИЙ КЕЙС

(ФИЗИКА. 10-11 КЛАССЫ)

Вычисление коэффициента полезного действия циклического процесса

АВТОР:
ЯКУТА АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
к. ф-м. н., старший научный сотрудник лаборатории естественно-научного образования ФГБНУ «ИСМО»

РЕЦЕНЗЕНТ:
АСАНОВА ЛИДИЯ ИВАНОВНА
к. п. н., старший научный сотрудник лаборатории естественно-научного образования ФГБНУ «ИСМО»

Москва
2024

Аннотация

Методический кейс направлен на развитие методических компетенций педагогических работников.

Выбор темы кейса обусловлен наличием статистически выявляемых трудностей (см. [1, с. 16–17]), которые возникают у обучающихся при решении задач, требующих вычисления коэффициента полезного действия циклических процессов, осуществляемых с идеальным газом (задание № 23 КИМ ЕГЭ по физике – повышенной трудности, с развёрнутым ответом). Данные трудности обусловлены тем, что для решения указанных задач обучающимся необходимо одновременно применять знания, относящиеся к различным темам раздела «Молекулярная физика и термодинамика» федеральной рабочей программы по физике, а также демонстрировать владение достаточно широким спектром умений. При этом, согласно федеральной рабочей программе по физике как на базовом, так и на углублённом уровне, необходимость формирования умения решать соответствующие задачи подразумевается единственной короткой фразой «Коэффициент полезного действия тепловой машины» (или же просто «КПД»). Это не даёт учителю возможности задать обучающимся, изучающим физику на углублённом уровне, верные ориентиры в процессе их обучения решению физических задач на вычисление КПД циклических процессов, в которых газом совершается работа. При этом, как в вариантах КИМ ЕГЭ по физике, так и в заданиях различных олимпиад школьников, соответствующие задачи регулярно встречаются, поскольку их рассмотрение не требует привлечения каких-либо знаний, выходящих за рамки федеральной рабочей программы.

Необходимые знания и умения

Для успешного решения задач на вычисление КПД циклических процессов, осуществляемых с идеальным газом, обучающиеся должны *освоить элементы содержания*, относящиеся к различным темам раздела «Молекулярная физика и термодинамика».

По теме «Основы молекулярно-кинетической теории»:

- Газовые законы. Уравнение Менделеева-Клапейрона.
- Абсолютная температура (шкала температур Кельвина).
- Изопроцессы в идеальном газе с постоянным количеством вещества.
- Графическое представление изопроцессов: изотерма, изохора, изобара.

По теме «Термодинамика. Тепловые машины»:

- Элементарная работа в термодинамике. Вычисление работы по графику процесса на pV-диаграмме.
- Количество теплоты. Удельная и молярная теплоёмкости вещества. Уравнение Майера. Понятие об адиабатном процессе.
- Первый закон термодинамики. Внутренняя энергия. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии термодинамической системы.
- Второй закон термодинамики.
- Принципы действия тепловых машин. КПД. Максимальное значение КПД. Цикл Карно.

Обучающиеся должны обладать умениями:

- Применять законы и формулы в типовых учебных ситуациях.
- Понимать графики зависимостей физических величин.
- Решать расчётные задачи с явно заданной и неявно заданной физической моделью, в том числе, на основании анализа условия обосновывать выбор физической модели, отвечающей требованиям задачи, применять формулы, законы, закономерности и постулаты физических теорий при использовании математических методов решения задач, проводить расчёты на основании имеющихся данных, анализировать результаты и корректировать методы решения с учётом полученных результатов.

Предлагается дополнить предметное содержание знакомством с темой «Политропический процесс», и, соответственно, предметными умениями – нахождение показателя политропы по графику процесса или по его словесному описанию и вычисление на основе этой информации молярной теплоёмкости идеального одноатомного газа в соответствующем процессе. Данное умение позволит в ряде случаев упростить вычисление КПД циклических процессов.

Методические рекомендации

1. Прежде чем переходить к объяснению способов вычисления КПД циклических процессов, совершаемых с идеальным газом, необходимо напомнить содержание первого и второго законов термодинамики и актуализировать знания следующих соотношений и формул:

- *уравнение Менделеева-Клапейрона* ($pV = \nu RT$);
- *газовые законы* ($pV = const$ при $T = const$; $p/T = const$ при $V = const$; $V/T = const$ при $p = const$);
- *графическое представление изопроцессов на* pV*-диаграмме*;
- *вычисление работы по графику процесса на* pV*-диаграмме*;
- *молярные теплоёмкости одноатомного идеального газа при постоянном объеме* $C_V = \Delta Q_V/(\nu\Delta T) = (3/2)R$ *и постоянном давлении* $C_p = \Delta Q_p/(\nu\Delta T) = (5/2)R$;
- *уравнение Майера* ($C_p = C_V + R$);
- *внутренняя энергия одноатомного идеального газа* ($U = (3/2)\nu RT = (3/2)pV = C_V\nu T$);
- *первый закон термодинамики* ($\delta Q = \mathit{\Delta} U + \delta A$);
- *определение КПД циклического процесса* ($\eta = A_{\text{цикла}}/Q_{\text{нагр}} = 1 - |Q_{\text{хол}}|/Q_{\text{нагр}}$, где $A_{\text{цикла}} = Q_{\text{нагр}} - |Q_{\text{хол}}|$);
- *формула для КПД цикла Карно* ($\eta_{\text{к}} = 1 - T_{\text{хол}}/T_{\text{нагр}}$).

2. Затем рекомендуется схематически проиллюстрировать принцип действия циклического теплового двигателя, обязательными элементами

которого являются совершающее работу $A_{\text{цикла}}$ рабочее тело (в школьных задачах это идеальный одноатомный газ, хотя на олимпиадах могут предлагаться задачи, требующие рассмотрения двухатомного газа); нагреватель (тело, передающее рабочему телу количество теплоты $Q_{\text{нагр}}$); холодильник (тело, которому рабочее тело отдает количество теплоты $|Q_{\text{хол}}|$). Необходимо подчеркнуть, что, в соответствии со вторым законом термодинамики, невозможно реализовать циклический тепловой двигатель, для которого $|Q_{\text{хол}}| = 0$ (и, соответственно, $A = Q_{\text{нагр}}$). По этой причине КПД циклического процесса не может достигать единицы, и, тем более, превышать её (т. е. всегда $\eta < 1$). Следует понимать, что эффективность обращённого циклического процесса может превышать единицу (пример – тепловой насос).

3. Далее нужно представить план действий, которые необходимо предпринять для решения задачи на вычисление КПД циклического процесса. Поскольку для вычисления КПД может быть использована любая из двух формул ($\eta = A_{\text{цикла}}/Q_{\text{нагр}} = 1 - |Q_{\text{хол}}|/Q_{\text{нагр}}$), то ключевыми этапами решения является поиск двух любых составляющих энергетического баланса из следующего набора: $A_{\text{цикла}}$, $Q_{\text{нагр}}$, $|Q_{\text{хол}}|$. Соответственно, схема решения включает следующие этапы:

Шаг 1. Изобразить циклический процесс на pV-диаграмме (если это ещё не сделано в условии задачи).

Шаг 2. Выявить участки циклического процесса, на которых рабочее тело получает количество теплоты от нагревателя, отдаёт количество теплоты холодильнику, не обменивается количеством теплоты с окружающими телами. Для этого следует использовать первый закон термодинамики: при переходе из состояния 1 в состояние 2 газ обменивается с окружающими телами количеством теплоты $\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} + \Delta A_{12}$, причём $\Delta U_{12} > 0$, если $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$ (если температура газа растёт), а $\Delta A_{12} > 0$ если $\Delta V = V_2 - V_1 > 0$ (если газ расширяется).

Шаг 3. Выявить участки циклического процесса, являющиеся изопроцессами, и установить их характер (изотермический, изохорический, изобарический).

Шаг 4. Принять решение, какие две составляющих энергетического баланса из трёх ($A_{\text{цикла}}$, $Q_{\text{нагр}}$, $|Q_{\text{хол}}|$) наиболее просто вычислить. Следует отметить, что совершаемая газом за цикл работа $A_{\text{цикла}}$ численно равна площади циклического процесса, изображённого на pV-диаграмме. Она легко ищется, если циклический процесс на данной диаграмме изображается в виде правильной фигуры (прямоугольник, треугольник, трапеция). Количества теплоты $Q_{\text{нагр}}$ и (или) $|Q_{\text{хол}}|$ легко вычисляются в случаях, если соответствующие участки циклического процесса являются изохорическими или изобарическими процессами, либо иными процессами с известной постоянной молярной теплоёмкостью. Работа, совершаемая газом на участке циклического процесса, численно равна площади под кривой, изображающей данный процесс на pV-диаграмме.

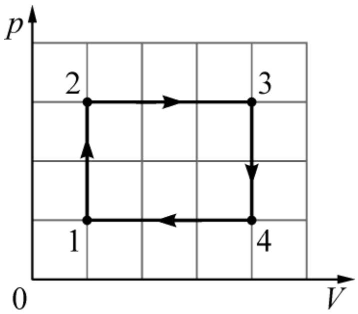
Шаг 5. Пользуясь формулами для ΔQ_V, ΔQ_p, ΔU, а также первым законом термодинамики, найти необходимые составляющие энергетического баланса. Для этого может понадобиться использовать условия замкнутости циклического процесса, то есть соотношения между p, V и T в состояниях, принадлежащих данному участку циклического процесса. Также может оказаться нужным применить уравнение Менделеева-Клапейрона.

Шаг 6. Найти КПД циклического процесса. Подставив численные значения из условия задачи, убедиться, что $0 < \eta < 1$.

Также следует иметь в виду, что КПД любого циклического процесса не может превышать КПД цикла Карно, осуществляемого при тех же максимальной и минимальной температурах, что и рассматриваемый циклический процесс.

Примеры решения задач

Пример 1. Циклический процесс, все участки которого являются изопроцессами.



С неизменным количеством идеального одноатомного газа совершают циклический процесс 1–2–3–4–1, который на pV-диаграмме представляется прямоугольником (см. рисунок). Максимальный объём газа в течение этого процесса в 4 раза превышает минимальный. Температуры в состояниях 1 и 3 равны $T_1 = 250$ К и $T_3 = 1250$ К соответственно. Найдите КПД этого циклического процесса.

Решение.

Шаг 1. Циклический процесс изображен на pV-диаграмме в условии задачи.

Шаг 2. На участках 1–2 и 2–3 газ получает количество теплоты от нагревателя, а на участках 3–4 и 4–1 отдаёт количество теплоты холодильнику.

Шаг 3. Все участки цикла являются изопроцессами (изохорическими или изобарическими).

Шаг 4. Цикл на pV-диаграмме изображается в виде прямоугольника. Поэтому в данном случае удобно искать как количества теплоты $Q_{\text{нагр}}$ и $|Q_{\text{хол}}|$, так и работу, совершённую газом за цикл. Вычислим $Q_{\text{нагр}}$ и $|Q_{\text{хол}}|$.

Шаг 5. Будем отмечать нижними индексами 1, 2, 3 и 4 физические величины (объем V и температуру T), относящиеся к состояниям 1, 2, 3 и 4 газа. Согласно условию, $V_4 = 4V_1$. Воспользуемся при расчёте количеств теплоты формулами для C_V и C_p.

$$Q_{\text{нагр}} = C_V\nu(T_2 - T_1) + C_p\nu(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}R\nu(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}R\nu(T_3 - T_2),$$

$$|Q_{\text{хол}}| = C_V\nu(T_3 - T_4) + C_p\nu(T_4 - T_1) = \frac{3}{2}R\nu(T_3 - T_4) + \frac{5}{2}R\nu(T_4 - T_1).$$

Для отыскания температур T_2 и T_4 запишем уравнения изобарических процессов (это и будут условия замкнутости цикла):

$$\frac{V_1}{T_2} = \frac{V_4}{T_3}, \qquad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_4}{T_4}.$$

Отсюда $T_2 = \frac{V_1}{V_4} T_3 = \frac{T_3}{4}$ и $T_4 = \frac{V_4}{V_1} T_1 = 4T_1$. С учётом этого получаем:

$$Q_{\text{нагр}} = \frac{3}{2} R\nu \left(\frac{T_3}{4} - T_1 \right) + \frac{5}{2} R\nu \left(T_3 - \frac{T_3}{4} \right) = \frac{3R\nu}{4} (3T_3 - 2T_1),$$

$$|Q_{\text{хол}}| = \frac{3}{2} R\nu (T_3 - 4T_1) + \frac{5}{2} R\nu (4T_1 - T_1) = \frac{3R\nu}{2} (T_3 + T_1).$$

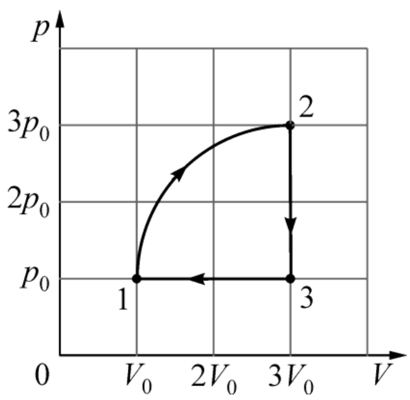
Шаг 6. Найдём КПД циклического процесса.

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{хол}}|}{Q_{\text{нагр}}} = 1 - \frac{2(T_3 + T_1)}{3T_3 - 2T_1} = \frac{T_3 - 4T_1}{3T_3 - 2T_1}.$$

Вычислим значение КПД – оно получается меньше 1:

$$\eta = \frac{1250 - 250}{3 \cdot 1250 - 2 \cdot 250} \approx 0{,}31 = 31\ \%.$$

Пример 2. Циклический процесс, содержащий участки, которые не являются изопроцессами.



На pV-диаграмме показан циклический процесс 1–2–3–1, проводимый с постоянным количеством идеального одноатомного газа (см. рисунок). Участок 2–3 этого процесса изохорический, участок 3–1 изобарический, а участок 1–2 при некотором выборе масштаба диаграммы изображается на ней в виде четверти дуги окружности с центром в точке ($3V_0$; p_0). Найдите для этого циклического процесса КПД и определите, во сколько раз он отличается от КПД цикла Карно, реализуемого при тех же максимальной и минимальной температурах.

Решение.

Шаг 1. Циклический процесс изображен на pV-диаграмме в условии задачи.

Шаг 2. На участке 1–2 газ получает количество теплоты от нагревателя, а на участках 2–3 и 4–1 отдаёт количество теплоты холодильнику.

Шаг 3. Изопроцессами являются участки 2–3 и 4–1 циклического процесса.

Шаг 4. Цикл на pV-диаграмме изображается в виде четверти круга. Поскольку он получает количество теплоты на одном участке, а отдаёт на двух участках, в данном случае удобно искать количество теплоты $Q_{\text{нагр}}$ и работу, совершённую газом за цикл.

Шаг 5. Будем отмечать нижними индексами 1, 2 и 3 и 4 физические величины (объем V и температуру T), относящиеся к состояниям 1, 2 и 3 газа. Работа, совершенная за цикл, численно равна площади четверти круга:

$$A = \frac{1}{4}\pi(3V_0 - V_0)(3p_0 - p_0) = \pi p_0 V_0.$$

Отметим, что в данном случае нельзя вычислять площадь четверти круга по формулам $A = \frac{1}{4}\pi(2V_0)^2$ или $A = \frac{1}{4}\pi(2p_0)^2$, поскольку работа должна иметь размерность [Дж], т. е. при вычислении работы необходимо перемножать величины, имеющие размерности давления и объема.

Найдем количество теплоты $Q_{\text{нагр}}$ с учётом того, что работа $A_{1\to2}$, совершаемая газом в процессе 1–2, численно равна площади под соответствующим участком на pV-диаграмме.

$$Q_{\text{нагр}} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + A_{1\to2} =$$

$$= \frac{3}{2}(3p_0 \cdot 3V_0 - p_0 \cdot V_0) + p_0 \cdot (3V_0 - V_0) + \frac{1}{4}\pi(3V_0 - V_0)(3p_0 - p_0) =$$

$$= p_0 V_0(\pi + 14).$$

Шаг 6. Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{нагр}}} = \frac{\pi p_0 V_0}{p_0 V_0 (\pi + 14)} = \frac{\pi}{\pi + 14} \approx 0{,}18 = 18\ \% < 100\ \%.$$

В рассмотренном циклическом процессе минимальная температура достигается в состоянии 1, а максимальна – в состоянии 2. Рассчитаем КПД соответствующего цикла Карно, реализуемого при данных минимальной и максимальной температурах:

$$\eta_{\text{к}} = 1 - \frac{T_{\text{хол}}}{T_{\text{нагр}}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{p_0 V_0}{3p_0 \cdot 3V_0} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89 = 89\ \%.$$

Таким образом, КПД рассмотренного цикла меньше, чем КПД соответствующего цикла Карно в $\eta_{\text{к}}/\eta \approx 5$ раз.

Дополнительное предметное содержание

Процессы, в течение которых теплоёмкость остаётся постоянной, называются *политропическими*. Уравнение политропического процесса, записанное с использованием переменных p и V, имеет вид: $pV^n = \text{const}$. Константа n называется *показателем политропы*. Если молярные теплоёмкости газа при постоянном объёме и постоянном давлении равны C_V и C_p, то показатель политропы равен $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$, где C – молярная теплоемкость в данном политропическом процессе.

Изопроцессы, изучаемые в школьном курсе физики, являются политропическими. Легко заметить, что в изотермическом процессе $n = 1$; в изобарическом процессе $p = \text{const}$ и $n = 0$; в изохорическом процессе $V = \text{const}$ и $n = \pm\infty$ (поскольку $C = C_V$).

Выразив молярную теплоёмкость C в политропическом процессе через n, получим: $C = C_V \frac{n - (C_p/C_V)}{n-1}$. Для одноатомного газа $C_p/C_V = 5/3$, поэтому $C = \frac{3}{2} \frac{n-(5/3)}{n-1} R = \frac{3n-5}{2(n-1)} R$. Таким образом, если из условия задачи явно следует, что какой-либо участок циклического процесса является политропическим, и при этом показатель политропы легко определяется, можно быстро определить количество теплоты, которым газ обменялся в течение соответствующего процесса с окружающими телами.

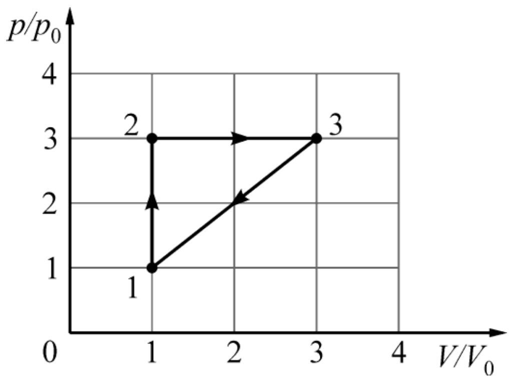
1) Определяем n.

2) По приведённой выше формуле находим C.

3) При известной разности температур ΔT вычисляем $\Delta Q = C\nu\Delta T$ (для отыскания ΔT может понадобиться применить уравнение Менделеева-Клапейрона).

Пример 3. Циклический процесс, все участки которого являются политропическими процессами (два способа решения).

Идеальный одноатомный газ в количестве ν = 1 моль участвует в циклическом процессе 1–2–3–1, изображённом на диаграмме (p и V – давление и объём газа, p_0 и V_0 – некоторые постоянные величины). Найдите КПД этого циклического процесса.



Решение (способ 1 – стандартная схема решения).

Шаг 1. Циклический процесс изображён на pV-диаграмме в условии задачи.

Шаг 2. На участках 1–2 и 2–3 газ получает количество теплоты от нагревателя, а на участке 3–1 отдает количество теплоты холодильнику.

Шаг 3. Участки 1–2 и 2–3 являются изопроцессами (изохорическим и изобарическим соответственно).

Шаг 4. Цикл на pV-диаграмме изображается в виде прямоугольного треугольника. Поэтому удобно искать работу газа, совершённую за цикл, и количество теплоты, полученное в течение изопроцессов от нагревателя.

Шаг 5. Будем отмечать нижними индексами 1, 2 и 3 физические величины (давление p, объём V и температуру T), относящиеся к состояниям 1, 2 и 3 газа.

Работа, совершённая газом за полный цикл, численно равна площади треугольника на pV-диаграмме:

$$A_{цикла} = (1/2)(p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = (1/2)(3 - 1)p_0(3 - 1)V_0 = 2p_0V_0.$$

Суммарное количество теплоты, полученное газом на участках 1–2 и 2–3, равно (с учетом значений C_V и C_p и уравнения Менделеева-Клапейрона):

$$Q_{нагр} = (3/2)\nu R(T_2 - T_1) + (5/2)\nu R(T_3 - T_2) =$$

$$= (3/2)(3p_0 \cdot V_0 - p_0V_0) + (5/2)(3p_0 \cdot 3V_0 - 3p_0V_0) = 18p_0V_0.$$

Шаг 6. КПД циклического процесса равен:

$$\eta = A_{цикла}/Q_{нагр} = 2p_0V_0/(18p_0V_0) = 1/9 \approx 0{,}11 = 11\ \%\ (\eta < 1).$$

Решение (способ 2 – использование политропического процесса).

Заметим, что процесс 3–1 является политропическим, поскольку для него $p/V = pV^{-1} = \text{const}$. Следовательно, $n = -1$, $C = \frac{3n-5}{2(n-1)}R = \frac{3\cdot(-1)-5}{2(-1-1)} = 2R$. Тогда $|Q_{хол}| = 2R\nu(T_3 - T_1) = 2(3p_0 \cdot 3V_0 - p_0V_0) = 16p_0V_0$ и

$$\eta = 1 - |Q_{хол}|/Q_{нагр} = 1 - (16/18) = 1/9.$$

Отметим, что применение второго способа не требует вычисления работы, совершаемой газом за цикл.

Для повышения интереса к изучению данной темы предложите обучающимся подготовить реферат или краткое сообщение о жизни и научной деятельности учёных, внёсших большой вклад в развитие термодинамики (Д. Джоуль, Р. Клаузиус, С. Карно).

Дополнительные интернет-источники

1. Демидова М.Ю., Грибов В.А. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2024 года по физике. – М.: ФИПИ, 2024. – 35 с. URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2024/fi_mr_2024.pdf
2. Соколовский Ю.И. Тепловые машины // Квант. – 1973. – № 12. – С. 12–20. – URL: https://kvant.mccme.ru/1973/12/teplovye_mashiny.htm